

儿童少年期死亡率模型研究

黄荣清

【提要】 按照死亡率的年龄变动特征,可以把人的一生分为儿童少年期、青壮年期和老年期。本文较为详细地讨论了儿童少年期死亡模型的构造,各种模型的数学函数形式及它们的相互联系,并用日本人口完全生命表的数据对模型进行了检验,得出了各种模型在不同场合下的精度,最后,对各种模型的适用范围进行了比较。

【作者】 黄荣清 首都经济贸易大学人口经济研究所副所长、研究员。

无论在日常生活中还是在人口研究中,人们习惯地把人的一生划分为儿童少年期、青壮年期和老年期。与这三个时期相对应的人口死亡率的变化也大相径庭。儿童少年期死亡率随年龄增加而降低;青壮年期死亡率随年龄增加缓慢上升,但在一些人口中某些年龄略有起伏;而到老年期,死亡率则随年龄增加迅速升高。

1662年,格兰特(J. Graunt)编制了最早的生命表。生命表中按年龄排列的死亡人数变化,实际上已提示了死亡率随年龄变化的特点。哈雷(Harry, 1693)在格兰特生命表基础上进行改进,编制了具有现代形式的生命表,使研究死亡规律的可能性又推进了一大步。从这以后,不少学者对死亡率变动规律进行了探索,但影响最深的大概要推19世纪20年代冈培兹(Gompertz)的研究,以及19世纪60年代麦克海姆(Makehem)对冈培兹模型的改进。虽然冈培兹在阐述死亡规律时,认为死亡力是随年龄增加而上升的,这与实际人口的儿童少年期死亡规律不符合,但从冈培兹建立的死亡模型的指数函数中,只要在指数上取不同符号,就能表现不同的死亡力变动特点,从形式上也能体现儿童少年期死亡率变化特点。所以,19世纪70年代Thilc.T.N提出的年龄别死亡力模型中,在儿童少年期选用的还是指数函数形式。随着对死亡研究的深入,人们开始注意到了韦伯(Weibull)分布模型,韦伯分布的死亡力函数是幂函数形式。人们认为对幂取不同值同样可以表现不同年龄期死亡力特点。金敏子(1981年)最早系统地比较了在儿童少年期韦伯分布模型和冈培兹模型,得出的结论是韦伯的模型要优于冈培兹模型。笔者(1986年)在比较几个模型基础上,认为韦伯分布模型对新生儿的死亡变动也很适合。另外,Heligman和Pollard(1980年)还提出了儿童少年期的年龄别死亡概率模型。

本文拟从对实际数据分析中,提出儿童少年期死亡函数模型的产生和建立,比较不同形式下死亡模型的精度,并对不同模型在不同场合下的适用性进行探讨。

1. 儿童少年期死亡模型

熟悉人口生命表的人都知道,设从出生到 x 岁的概率为 $l(x)$,若把 $l(x)$ 看作随时间或者年龄变化的变量,则 $l(x)$ 可以表示为:

$$L(x) = \exp\left(-\int_0^x u(y)dy\right) \quad (1)$$

这里 $u(x)$ 为 x 年龄点上的瞬间死亡率，或者说死亡速度，人口学上常称之为死亡力。

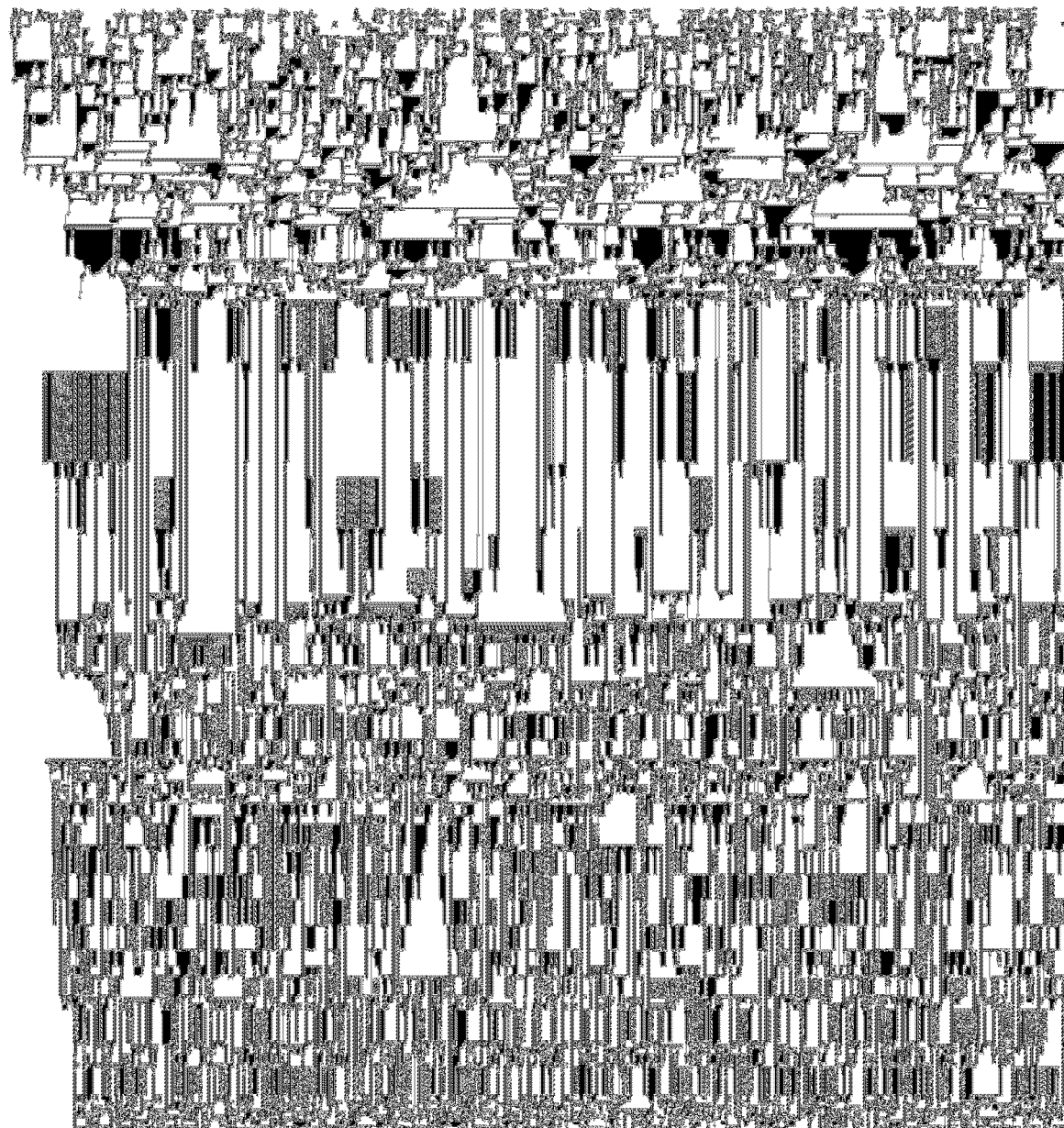
定义：
$$U(x) = \int_0^x u(y)dy$$

从数学上看， $U(x)$ 为死亡力 $u(x)$ 的原函数，它是由从 0 到 x 年龄区间 $u(x)$ 的积分值，而积分从本来意义上说是求和，所以认为 $U(x)$ 是死亡力 $u(x)$ 的和函数，简称为死亡力和。由于引入了死亡力和函数，则 (1) 式可改写为：

$$L(x) = \exp(-U(x))$$

$$\text{或 } U(x) = \ln(1/L(x)) \quad (2)$$

从理论上讲， $U(x)$ 的引进对死亡规律把握并没有推进，只是改变了一种表现形式。但我们的确在研究死亡规律时，人们称各年龄死亡率为常数，而将死亡力理解为随年龄而变化的函数。



模型是很适合, 而当 $e_0 < 55$ 岁时, $\ln U(x)$ 的图形略有弯曲。可以设想, 当在死亡率较高, 即期望寿命较小的情况下, 用韦伯分布作为儿童少年期的死亡模型会产生一定误差。

为了使模型具有更广泛的适应性, 我们设想构造这样的模型: 它比韦伯分布有更高的适应性; 在高死亡力状态下, 它比韦伯分布模型精度要高; 当死亡力下降到一定水平时, 该模型与韦伯分布的函数形式接近。

一般在构造数学模型时, 总是从最简单的函数形式开始的。即首先选择简单的数学函数, 看是否能描述实际事物的运动变化。如果用简单的函数就能描述该事物的运动变化, 那是最好不过; 若不能, 则我们观察这种简单的函数形式和实际事物的运动相差多少, 若差得很远, 可以认为这种形式不适合而舍弃它, 若差得不多, 则可在这种简单函数形式的基础上加以改良。在构筑儿童少年期死亡模型时, 我们已经知道在死亡力较低时, $U(x)$ 的韦伯分布即幂函数形式是合适的。对于死亡力较高的情况, 我们只要在幂函数基础上加以改进即可。

在简单的初等函数中, 除了幂函数外, 常用的形式还有指数函数和对数函数。我们可以尝试把指数幂数和对数函数相结合, 观察在这种结合形式下是能较好反映儿童少年期死亡率随年龄的变化。在幂函数和上述两种函数结合的形式为:

$$U(x) = Ax^B \exp(cx) \quad (5)$$

$$U(x) = Ax^B \ln^C(1+x) \quad (6)$$

另外, 在期望寿命较高情况下, $\ln U(x)$ 成为 $\ln x$ 的一次函数, 在期望寿命较低的情况下, $\ln U(x)$ 变化要复杂一些, 则可以用 $\ln x$ 的二次函数来估计, 死亡力和函数可用以下形式:

$$U(x) = Ax^{B+C \ln(x+1)} \quad (7)$$

在 (5) ~ (7) 式中, 当 $c=0$ 时都变成韦伯分布形式。因此, 可以把这些模型看成是韦伯分布模型的推广。

下面我们把 $U(x)$ 的韦伯分布形式作为儿童少年期的模型 1, 式 (5)、(6)、(7) 右边的函数形式分别作为模型 2、模型 3 和模型 4。

在年龄初期, 存活概率 $l(x)$ 的值接近于 1, 或者说 $1/l(x) - 1$ 接近于 0。在这种场合下, $1/l(x) - 1 = \ln(1/l(x)) = U(x)$, 所以在儿童少年期, 对 $U(x)$ 适合的数学函数形式, 可以设想对 $1/l(x) - 1$ 也适合。这样儿童少年期的死亡模型也可写成如下形式:

$$1/l(x) - 1 = Ax^B \quad (8)$$

$$1/l(x) - 1 = Ax^B \exp(cx) \quad (9)$$

$$1/l(x) - 1 = Ax^B \ln^C(x+1) \quad (10)$$

$$1/l(x) - 1 = Ax^{B+C \ln(x+1)} \quad (11)$$

我们把 (8) ~ (11) 式的形式分别称为模型 5 ~ 8。

Heligman 和 Pollard (1980) 认为在死亡率下降期, 年龄别死亡概率具有如下形式:

$$q(x) = \exp(-A(x+\theta)^B) \textcircled{1}$$

把上式变形后可得:

$$\ln 1/q(x) = A(x+\theta)^B \quad (12)$$

事实上, 如果在儿童少年期死亡适合韦伯分布形式, 有 $U(x) = ax^b$, 则 $u(x) = abx^{b-1}$

$$\ln 1/p(x) = U(x+1) - U(x) = U'(x+\theta_x) = ab(x+\theta_x)^{b-1}$$

$$0 \leq \theta_x \leq 1$$

① 在原文中该函数写成 $q(x) = A^{a+bf}$ 的形式。

这里 $p(x)$ 为 x 岁年龄组的存活概率。令 $A=ab$, $B=b-1$ 。严格地说, θ_x 在各个年龄区间 $[x, x+1]$ 并不相同, 我们假定它在各区间都相同, 即 $\theta_x \equiv \theta$, 则上式写为:

$$\ln 1/p(x) = A(x+\theta)^B \quad (13)$$

(13) 式右边的函数形式与 Hcligman 等的模型形式相同。不过前者描述的是单岁组的存活概率, 后者描述的是单岁组的死亡概率罢了。我们把 (13) 称为模型 9, 把 (12) 式称为模型 10。

2. 各种模型精度的比较

下面, 我们以实际人口的数据来比较各种模型的精度。其步骤是: (1) 先根据实际数据, 用一定方法估计出每个模型中的参数值; (2) 由确定的模型参数, 最终算出在该模型的死亡概率 $\hat{q}(x)$; (3) 再把它和实际的 $q(x)$ 相比较。设其误差 $\Delta = \sqrt{\sum_0^n (\hat{q}(x) - q(x))^2 / n}$

这里 n 为死亡率下降期的年龄组数。

对于模型 1 ~ 8, 两边取对数后, 就成为线性函数形式。不过模型 1、5 为单变量函数, 而模型 2、3、4 及 6、7、8 为多变量函数, 都可用最小二乘法估计其参数值。而模型 9、模型 10 则需用非线性回归估计其参数。

检验模型精度的实际数据使用的是日本完全生命表中的资料。到目前为止, 日本共编制到第十七回完全生命表。由于资料本身对模型影响很大, 所以我们先介绍一下日本完全生命表的编制情况。

日本第一回至第三回完全生命表是根据日本人口动态统计男女年龄别死亡数和以户籍统计为基础推算的男女年龄别人口数作为基础资料作成的。1920 年, 日本进行了第一次人口普查 (国势调查)。从此, 编制完全生命表的基础人口数就完全根据人口普查的数字。在这一次普查基础上编制了第四回 (1921 ~ 1925 年) 人口完全生命表。第四回人口生命表中有意把 1920 年除外, 是因为在第一次世界大战后发生了世界性的流行性感胃 (据说这次严重的流行性感胃引起的死亡人口数, 比第一次世界大战参战国战死的人口还多), 日本有 1/3 的人口被传染上流行性感胃, 死亡人口达 38 万以上。由于这一年死亡发生极不正常, 所以在编制生命表时把这一年剔除了。但即使剔除了 1920 年, 由于恶性流行性感胃的后遗症以及发生了关东大地震, 所以在第四回完全生命表中死亡力还是特别高。以后 10 年又编制了两次完全生命表。1937 ~ 1945 年, 日本发生了对华侵略战争以及太平洋战争, 使死亡人口剧增, 也中断了正常的统计工作, 原准备编制的第七回生命表因资料残缺也未做成。第二次世界大战结束后, 1947 年进行了临时的人口普查, 在此基础上编制了第八回生命表。之后, 又根据 1950 ~ 1952 年经常性统计资料编制了第九回完全生命表。直到编制第十回完全生命表才可以说是完全趋于正常, 即利用每隔 5 年进行一次的人口普查的数据作为人口资料, 用普查当年的死亡统计数作为死亡人口资料, 采用精密的方法编制成完全生命表。

从以上可知, 在第十回生命表以前, 原始数据本身的准确性存在一定问题; 但第十回生命表以后, 可以说资料是相当可靠的。

观察表 1 和表 2 各种模型的误差, 以模型 1 (韦伯分布) 的精度划分, 则第十回生命表可认为是一个界线。第十回模型生命表以前, 模型的误差在千分之一以上, 而第十回生命表以后, 则误差降到千分之一甚至万分之一以下。

把模型 1 ~ 4 和对应的模型 5 ~ 8 的精度比较, 它们的精度非常接近。由于 $1/l(x)-1$

表 1 儿童少年死亡率模型用于日本男性人口的误差

‰

模型回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5.37	1.39	1.19	0.84	5.06	1.24	1.27	0.88	1.75	5.80
2	4.50	1.24	1.66	1.28	4.29	1.20	1.73	1.34	2.37	8.50
3	6.17	2.25	0.45	1.06	5.98	2.10	0.41	0.96	2.27	7.74
4	7.26	2.62	0.61	1.23	7.04	2.44	0.57	1.11	0.77	6.12
5	6.43	2.43	0.72	1.25	6.26	2.29	0.68	1.16	0.95	5.07
6	5.48	1.73	0.29	0.66	5.33	1.61	0.31	0.59	0.86	2.31
8	5.44	1.98	0.49	0.94	5.34	1.89	0.48	0.87	2.99	0.71
9	1.29	0.56	0.87	0.74	1.27	0.57	0.88	0.75	1.30	2.93
10	0.40	0.40	0.46	0.44	0.39	0.40	0.46	0.44	2.38	1.16
11	0.19	0.21	0.21	0.21	0.19	0.21	0.21	0.21	1.65	0.79
12	0.14	0.10	0.06	0.08	0.14	0.10	0.06	0.08	0.84	0.40
13	0.11	0.07	0.04	0.06	0.11	0.07	0.04	0.05	0.63	0.28
14	0.06	0.04	0.03	0.04	0.06	0.04	0.03	0.04	0.33	0.31
15	0.05	0.05	0.04	0.04	0.05	0.05	0.04	0.04	0.50	0.20
16	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.36	0.13
17	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.20	0.15

表 2 儿童少年死亡率模型用于日本女性人口的误差

‰

模型回数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4.99	1.31	1.29	0.93	4.70	1.19	1.35	0.98	1.73	4.67
2	4.35	1.38	1.74	1.39	4.14	1.35	1.80	1.45	2.20	7.00
3	5.94	2.46	0.75	1.33	5.73	2.31	0.70	1.24	1.43	6.78
4	6.89	2.53	0.68	1.21	6.66	2.35	0.66	1.10	1.04	4.45
5	6.18	2.14	0.52	0.98	6.00	2.00	0.51	0.89	0.61	2.85
6	5.19	1.65	0.45	0.67	5.05	1.54	0.47	0.61	1.32	1.27
7	5.57	2.04	0.53	0.97	5.48	1.95	0.52	0.91	4.43	0.79
9	1.50	0.52	0.86	0.71	1.48	0.53	0.87	0.72	1.29	1.76
10	0.51	0.44	0.55	0.51	0.50	0.45	0.55	0.51	1.25	1.54
11	0.17	0.17	0.20	0.19	0.17	0.17	0.20	0.19	2.11	0.98
12	0.06	0.05	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.06	0.85	0.34
13	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.03	0.70	0.27
14	0.04	0.02	0.03	0.03	0.04	0.02	0.03	0.03	0.43	0.35
15	0.03	0.02	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.29	0.23
16	0.03	0.02	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.27	0.20
17	0.04	0.02	0.02	0.02	0.03	0.02	0.02	0.02	0.21	0.15

和 $U(x)$ 在儿童少年期的值非常接近, 所以模型 1 ~ 4 和模型 5 ~ 8 的精度接近也在情理之中。

在死亡率较高的情况下, 模型 2、模型 3、模型 4 的精度要高于模型 1。相比之下, 以模型 3 的误差为小, 但在死亡率较低的情况下, 即第十回完全生命表以后, 这 4 个模型的精度非常接近。

同样, 在死亡率较高的情况下, 模型 9 和模型 10 的精度要较模型 1 高一些。但它们的模型精度要较模型 3 低。在死亡率较低的情况下, 模型 9 和模型 10 较模型 1 ~ 4 要差一些。

模型 9 和模型 10 相比, 总的来说, 在不同生命表中两个模型的精度互有千秋。相对地说, 在死亡率较高场合, 模型 9 的精度要高于模型 10; 而在死亡率较低场合, 则倒过来。

事实上，在死亡力较低情况下，模型 2 ~ 4 中的参数 A、B 和模型 1 中 A、B 非常接近，而 C 值很小（见表 3、表 4）。这说明，实际数据是非常支持对模型 2 ~ 4 的设计。

作为参考，我们做出第四回生命表（高死亡力，死亡不正常）和第十七回生命表（很低死亡力）， $l(x)$ 值和模型 1、3、10 的 $l(x)$ 估计值（见图 2、图 3）。图 4 是韦伯分布在年龄区间 (0,1) 内估计的死亡人口数和实际生命表死亡人口数的比较。假定活产 10 万个婴儿，用韦伯分布推算的在各时间点死亡人口数与实际统计的死亡婴儿数仅差 2 ~ 3 人，可见模型的精度是非常高的。

表 3 男性韦伯分布模型的参数值

	A	B	C1	C2	C3
1	0.1720	0.2592	-0.0289	0.8178	-0.0702
2	0.1797	0.2146	-0.0248	0.6919	-0.0598
3	0.1876	0.2031	-0.0278	0.8146	-0.0690
4	0.1917	0.2112	-0.0323	0.9466	-0.0803
5	0.1639	0.2180	-0.0330	0.9657	-0.0819
6	0.1308	0.2398	-0.0358	1.0353	-0.0882
8	0.1004	0.2623	-0.0441	1.2911	-0.1094
9	0.0606	0.2250	-0.0219	0.5765	-0.0509
10	0.0430	0.1941	-0.0078	0.1743	-0.0165
11	0.0338	0.1677	-0.0023	0.0362	-0.0041
12	0.0207	0.1692	0.0031	-0.1058	0.0085
13	0.0147	0.1832	0.0041	-0.1342	0.0109
14	0.0111	0.1888	0.0021	-0.0732	0.0058
15	0.0082	0.1964	0.0016	-0.0681	0.0051
16	0.0059	0.2062	0.0011	-0.0300	0.0026
17	0.0050	0.2162	-0.0031	0.0708	-0.0066

表 4 女性韦伯分布模型的参数值

	A	B	C1	C2	C3
1	0.1534	0.2733	-0.0301	0.8477	-0.0730
2	0.1605	0.2371	-0.0264	0.7361	-0.0636
3	0.1687	0.2256	-0.0284	0.8433	-0.0712
4	0.1694	0.2393	-0.0344	1.0066	-0.0854
5	0.1448	0.2450	-0.0361	1.0488	-0.0892
6	0.1146	0.2628	-0.0387	1.1144	-0.0950
8	0.0903	0.2771	-0.0500	1.4640	-0.1241
9	0.0537	0.2403	-0.0282	0.7503	-0.0660
10	0.0381	0.1947	-0.0132	0.3122	-0.0288
11	0.0279	0.1639	-0.0060	0.1384	-0.0129
12	0.0165	0.1539	-0.0031	0.0719	-0.0067
13	0.0116	0.1655	-0.0017	0.0390	-0.0037
14	0.0088	0.1681	-0.0041	0.1061	-0.0094
15	0.0067	0.1731	-0.0047	0.1292	-0.0113
16	0.0052	0.1680	-0.0052	0.1539	-0.0131
17	0.0042	0.1814	-0.0050	0.1582	-0.0131

注：C1, C2, C3 分别为模型 2、模型 3、模型 4 中相应的 C 值。

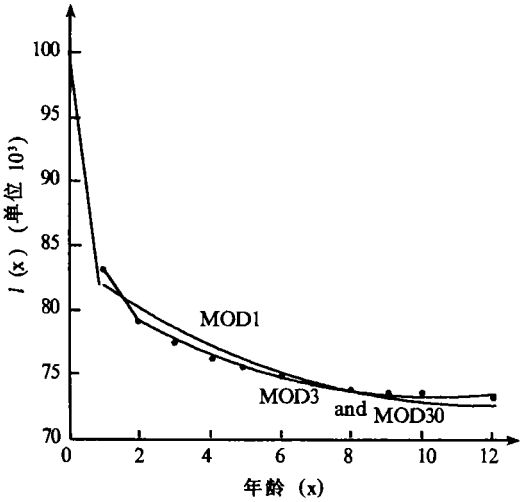


图 2 日本第四回完全生命表（男性）在儿童少年期（0 ~ 12 岁） $l(x)$ 模型值的比较

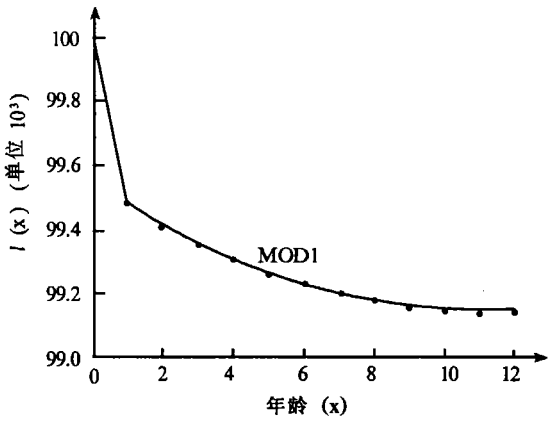


图 3 日本第十七回完全生命表（男性）在儿童少年期（0 ~ 12 岁） $l(x)$ 模型值的比较

3. 小结

人口死亡表现的是群体死亡现象，是生物因素和社会因素共同作用的结果。在生产落后、科学技术不发达的社会条件下，人的生命经常受到外界因素，例如饥荒造成的营养不良、恶性传染疾病等的威胁，死亡力比较高。这些外在因素对人口死亡影响是无规则的。这里说的无规则有两层意思：一是它的发生（例如传染病的流行）是无规则的；二是它对人口死亡的影响（不同人口群体包括不同人口年龄群体）是无规则的。在这种无规则的条件下，要找到表现不同情况下都适合的数学函数形式是

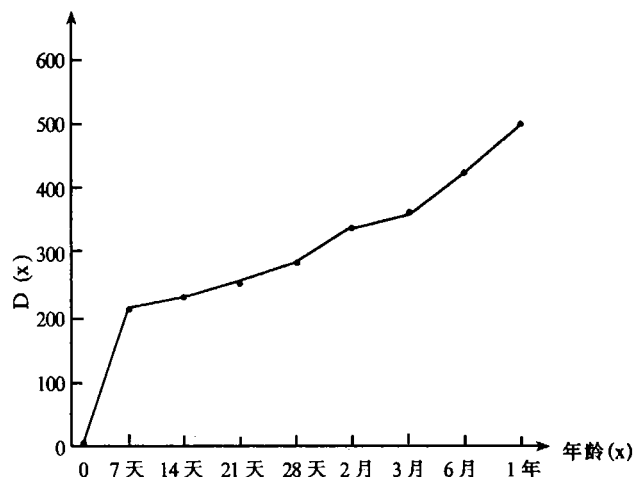


图4 从出生10万个婴儿中1年内模型死亡人口数与实际生命表死亡人口数的比较

困难的。所以在高死亡率状态下，一般来说，死亡模型的精度也要差一些。在低死亡率状态下，对人口生命威胁的外在因素影响越来越小，而导致人口死亡的内在因素（如遗传病、不治之症、衰老等）越来越成为主要因素，因而死亡变动显得越来越有规律。以婴儿死亡率来说，当人口期望寿命低时，在不同死亡率类型下婴儿死亡率相差很多；随着期望寿命的提高，不同死亡类型的婴儿死亡率差异逐渐缩小。这表明导致婴儿死亡的共同因素（生物因素）越来越占重要位置。

另外，高死亡率往往意味着社会经济不发达。这又常常和统计数据不准确联系在一起，这也是导致理论模型和实际数据出现差别的一个重要原因。

上述10个模型用于日本人口时的一个共同特点是：在死亡率较高的情况下，其误差都比较大；随着期望寿命的提高，误差都逐渐缩小。这说明，各个模型使用的函数形式在揭示儿童少年期的死亡规律方面在一定程度上都是有效的。我们现在还不能绝对地判断，在这10个模型中，哪一个最好，哪一个最劣。只能根据资料的情况、适用的范围和应用的简便与否来区别哪一个模型相对地更好一些。

3.1 从适用范围的广泛性上说，模型2、3以及与之对应的模型6、7比较好。因为与模型1相比较，它们不但在低死亡率情况下有很高的精度，而且在高死亡率情况下也有较高的精度。与模型8、9相比较，无论是高死亡率还是低死亡率情况下，它们的精度一般都要较后者高。

3.2 从模型的理论意义上说，模型1~4以及与之相对应的模型5~8的形式较模型9和10要好一些。因为前者是函数连续模型，后者是个离散模型。从理论上说，死亡率变动本来是应该连续变化的，只是在测量（统计）时，我们暂时没有能力把握这种连续变化的变量情况，而只能对它进行离散以后再进行测量。连续变化的模型不但在理论上有其重要意义，在应用方面也有很高价值。例如在实际中，我们尚无条件统计新生儿的死亡情况，利用连续模型我们能准确地推算其新生儿的死亡率（黄荣清，1986年）；另外，在确定终寿区间成数（死亡人口在它死去那一年龄组平均存活的时间长度）时，一般使用的是实验（统计）方法，既费力又不准确，而利用模型的连续形式则能方便地估计它；再如，在保险费率计算

中,我们不但要计算整年的赔偿金,还要计算几日、几星期、几月的赔偿金,这也只能用连续模型来解决。关于死亡力连续模型的理论和应用价值,由于篇幅关系,就不一一列举了。

3.3 从应用的方便与否说,则首推模型1和模型4。因为模型1和4的数学函数构造简单,且仅有两个参数,其参数只要用单变量线性回归手算就能确定。而其它模型中有3个参变量,为确定其参数,计算的工作量很大,常常只能借助于计算机来进行。与构造复杂的模型相比,构造简单的模型在应用推广方面的优势是显而易见的。

3.4 从对数据的要求来说,模型9和10最具优势。因为模型1~8都是连续模型,所以需要的原始数据支持要求比较严格。这种严格性表现在:(1)要求资料要完整,即在研究的年龄区间范围内,缺少任何一个年龄的资料模型就无法建立。(2)数据质量要求高。这是因为在连续模型中,各个年龄的变量是相互联系的。 l 的值受 x 岁以前的数据影响,例如婴儿死亡率数据的不准确会使所有的 $l(x)$ 值都不准确,从而使建立的模型也失真。模型9和模型10是关于单年龄组存活概率(死亡概率)的模型,它要求支持的数据是分散的,缺少其中一两个数据并不影响其数据的建立,而其中一两个数据不准确只会产生部分的失真,不会影响全体。这种对原始数据要求的宽松在应用上带来很多优点,特别是对不准确统计数据的修正价值更高。

参 考 资 料

1. 山口喜一、南条善治等编著:《生命表研究》日本,古今书院,1995年。
2. Kim, Minja Choe, "Fitting the Age Pattern of Infant and Child Mortality with the Weibull Survival Distribution", Asian and Pacific Census Forum, Vo.7, No.4, 1981, PP. 10~13.
3. 黄荣清:《年少期生存率模型》,日本大学《经济集志》1986年2月。
4. Heligman, L. and J. H. Pollard, "The age pattern of mortality", The Journal of the Institute of Actuaries, Vol. 107, part 1, No. 434, 1986. 6.
5. Coale, A. and P. Demeny "Reginal Model Life Tables and Seable Populations", Princeton University Press, 1966.
6. United Nations, Mortpark -, 1988.
7. 日本厚生省大臣官房统计情报部编:《第十七回生命表》,1992年。

(本文责任编辑:朱 犁)