乱象理论与人口规划

李西成　曲海波　汤奔天

20年来，中国的人口控制，举世瞩目。目前，由于人口增长率已降到比较低的水平，进一步降低或者稳定人口增长率是比较艰巨的任务。这既是实际工作的重点，又是理论研究的课题。笔者认为，数学上的乱象理论为人口规划和控制提供了基础，有必要研究其应用价值。

人口数量的变动，与时间和人口增长速度有关，人口学者常用函数关系来描述人口增长变化。这些数学表达式一般都有相应的人口增长理论为依据。早在1798年，马尔萨斯就曾提出众所周知的人口增长理论。1907年，洛特卡提出稳定人口理论。他认为，在封闭的人口中，如果人口年龄别生育率和年龄别死亡率不变，经过一定时期，就可形成稳定的人口年龄结构，从而预测其人口数量。稳定人口理论是现代人口预测的基础，在进行人口预测时，首先假定生育和死亡模式，然后研究在这些模式下人口发展变化的趋势。但是，实际人口的发展变化并不依照或者不完全依照假定的模式变化。对于人口的实际数量与人口预测数量之间的差别，学术界常用统计学上的随机变动来解释。按照传统的统计学说，一个变量的变化可用长期趋势、周期波动、季节变化以及随机变动来解释。长期趋势显示变量在某一时期中的基本动态；实际数值与趋势之间的差别则由周期波动、季节变化及随机变动而引起。顾名思义，周期波动解释长期趋势中的周期性循环往复；季节变化解释一个周期内各季节的规律性起伏；不具周期性、规律性的变化，则由随机变动来解释。换言之，随机变动解释那些剩余的，无法解释的变动。

人们完全有理由提出这样的问题：随机变动说解释的效果如何？解释的程度如何？有没有其他学说能够更科学地解释或解决这个问题？

近年来，数学领域内的两个理论对上述传统学说提出了挑战。其一是异于古典集合论的模糊理论（fuzzy set theory）。按照这一理论，变量的实际数值异于其长期趋势。周期波动，季节变化的原因，除了随机变动外，与其本质上的模糊性质也有关系。其二是乱象理论（Chaos theory）。这种理论认为变量在某些动态状况下会产生貌似无规律的周期变化。目前乱象理论已应用在物理、气象、生物等自然科学中，近年来也有人用以解释经济循环、股票涨落等现象。本文首先用乱象理论解释人口的增长变化，进而探讨乱象理论在人口规划、人口控制上的应用。

在一定的经济和自然条件下，一个环境所能容纳的人口数量，有其最佳状态；其最佳状态随着这些条件的变化而改变。

佛赫斯特（Verhust）曾经提出，因资源或其它因素的限制，一个封闭社会所能维持的人口总数有一最高限额，其实际人口数量越接近这个限额，则人口增长率就越低。卡斯提（Casti）将这一思想用数学表达式描述如下①。

$$X_{n+1}=rX_n(1-X_n)\quad O\leqslant X_n\leqslant 1 \tag{1}$$

式中的X_n是第n期人口数量与人口最高限额的比，在以百分比来表示时，它的最大数值

① J.L.Casti, Alternate Realities, Mathematical Models of Nature and Man, New York, John Wiley & Sons, 1989, pp.216~217.

是百分之百，也就是1；（$1-X_n$）是第n期人口最高限额与实际人口数值的相对差；r是人口增长速度（期末人口与期初人口比值与1的差）；X_{n+1}是第$n+1$期实际人口与最高人口的比。

培根（H.O.Peitgen）与理查特（P.H.Richter）修正了佛赫斯特资源与人口限额的思想，提出每个社会都有一个“理想”的人口上限。按照这个思想，X_n的上限就不限于1了，当$X_n>1$时，实际人口超过理想人口的上限；反之，当$X_n<1$时，实际人口不及上限。这一思想的数学表达式①是：

$$X_{n+1}=(1+r)X_n-rX_n^2 \qquad (2)$$

式中X_n是第n期人口数量与“理想”人口上限的比，X_{n+1}是第$n+1$期人口与“理想”人口上限的比，r是人口增长速度。

这个看似平常的动态方程式隐含着许多奇妙的变化。长期人口增减由实际人口与其理想人口上限比的始值（X_0）及人口增长速度来决定。按培根与理查特的分析，在$X_0=0.1$时，如$0\leqslant r\leqslant 2$，人口数量先呈波动，然后渐趋理想人口上限（如图1）；当$2<r\leqslant 2.49$和$2.5\leqslant r<2.57$时则人口呈周期循环（如图2、图3）。但是，一旦r值升至2.57，函数值不再具特定规律（如图4），换言之，在$r>2.57$时，函数的图象混乱而无规律，称为乱象。r值越大，函数值的变动越混乱。值得注意的是，（2）式中并未包括随机变量，

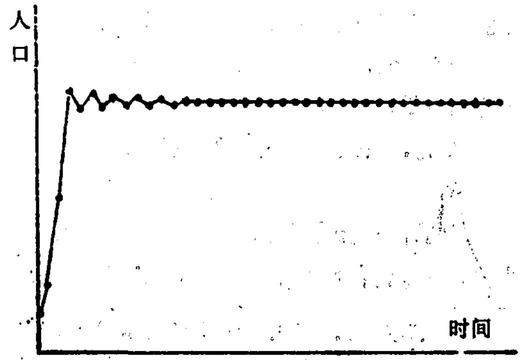

图1　r=1.8时人口波动曲线

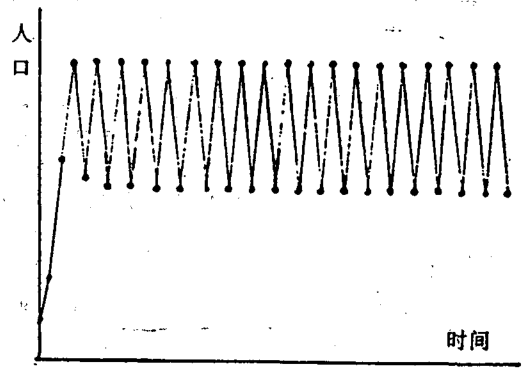

图2　r=2.3时人口波动曲线

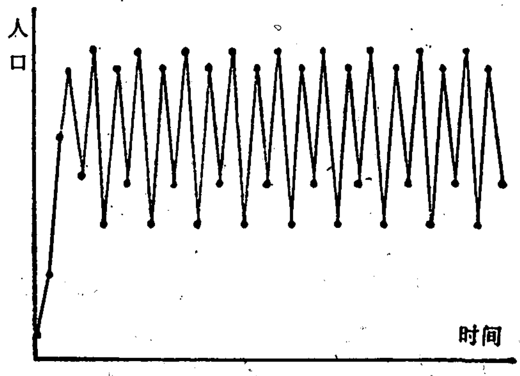

图3　r=2.5时人口波动曲线

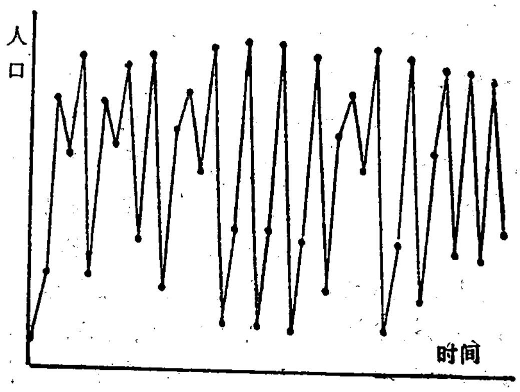

图4　r=3时人口波动曲线

函数值的混乱轨迹并不是由于随机变动所引起的。从（2）式本身的性质看，它与季节变化也无关系。

很多微分方程式及差分方程式都会产生乱象。（2）式只不过是其中的一个特例。我

① H—O Peitgen, and P.H.Richter, The beauty of Fractals, New York, Springer-Verlag, 1986, pp.23～26.

们想要知道的是，在哪种状况下，人口数量的变化会具有：1．各种不同的周期性循环。2．非周期循环的混乱轨迹是什么样的①。

李及约克（Li-York）定理回答了这个问题。这个定理指出，在从J的一个实数区间映射到同一区间的连续函数f中，如J中存有一点x，使，

$$f(f(f(x)))\leqslant x<f(x)<f(f(x)) \quad (3)$$

则J中存有每一k周期的轨迹，其中$k=1,2,3,\cdots\cdots$；且J亦含有非周期性的乱象轨迹②。

在许多能满足李—约克定理的函数中，"帐篷式"函数，在人口学中具有应用前景。这个函数的几何特征是它的图象先升后降而形若"帐篷"。若用纵轴表示X_{n+1}的值，横轴表示X_n的值，则（1）式的图象如图5，而（2）式的图象如图6。

为了便于进一步讲解，现将（2）式规范化，使X_n及X_{n+1}的值小于或等于1．规范化

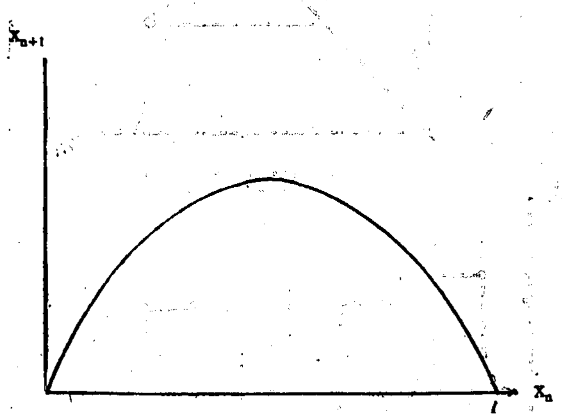

图5　$x_{n+1}=rx_n(1-x_n)$的图象

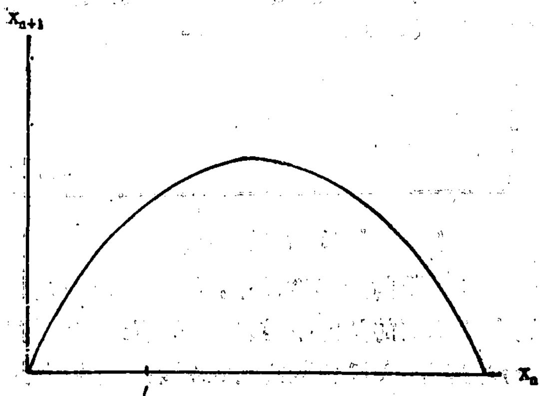

图6　$x_{n+1}=(1+r)x_n-rx_n^2$的图象

以后的帐篷式函数具有下列特征：

$$f(0)=0,\ 且 o\leqslant x\leqslant 1$$

但如这个函数具有非周期性波动，则x_n的最高值$\bar{x}$还要符合下列条件：

$$0<f(\bar{x})\leqslant f^{-1}(f^{-1}(\bar{x}))\leqslant f^{-1}(\bar{x})<\bar{x} \quad (4)$$

式中的f^{-1}表示反函数。也就是说，$f^{-1}(\bar{x})$是$\bar{x}$的前写像（Preimage），而$f^{-1}(f^{-1}(\bar{x}))$又是$f^{-1}(\bar{x})$的前写像。实际上，（4）式是（3）式的另一表述。如把它画在以x_n，x_{n+1}为轴的平面上，它的形似"帐篷"。

令$x_1=f^{-1}(f^{-1}(\bar{x}))$，$x_2=f^{-1}(\bar{x})$，

$x_3=\bar{x}$，$x_4=f(\bar{x})$，如图7，当第1期的x值为x_1时，依$x_2=f(x_1)$推算，下一期的x值是曲线上a点的高度。现在图上加一条穿过原点的45°线，则直线上每一点的高度与度相等（纵座标等于横座标）。把x_2在纵轴上的高度移到45°线上的b点，其横座标上的投点是x_2。第3期的x值应是$x_3=f(x_2)$，即曲线上c点的高度。同理，纵轴上第3期的x值，按c、d同高之理，在横座标上的投点是x_3。$x_4=f(x_3)$，第4期的x值，由e而g，在横座标上的投点是x_4。比较x_1，x_2，x_3，x_4的大小，可得到如下关系

$$0<x_4<x_1<x_2<x_3$$

或　$0<f(\bar{x})<f^{-1}(f^{-1}(\bar{x}))<f^{-}(\bar{x})<\bar{x}$

从图7中x值的变动或虚线的走向中看到，x值由小变大，又返而转小地绕了一个循环，且第二次循环的起点不同于首次循环的起点。这就是说，每次循环的起始值，都可能不相同。图7反映了乱象理论中非同期性循环的乱象。函数的这种现象如用图8的图象来描绘，则其乱象更加明显。

① R.H.Pay, "The Emergence of Chaos From Classical Economic Grouth", Quarterly Journal of Economics, May 1983, pp. 202.

② T.—Y. Li and Y.A.Yorke, "Period Three Implies Chaos", American Mathematical Monthly, December 1975, pp.985～992.

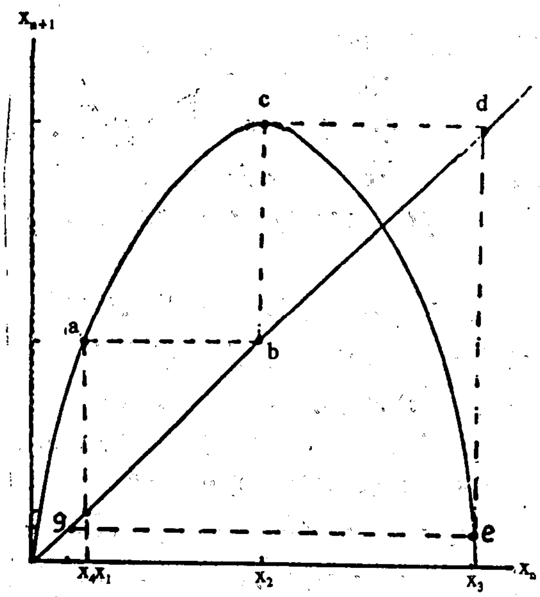

图7　帐篷式函数（一）

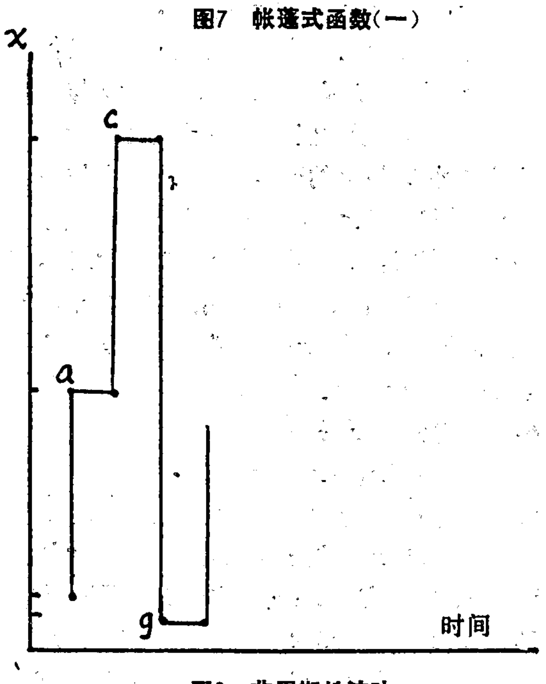

图8　非周期性波动

李一约克定理指出，含有非周期性循环的动态函数亦含有周期的循环。帐篷式函数亦含有具特定规律的波动。

图9图10是许多人口变动形态中的一种①。究竟在那种状况下人口呈周期性循环，而周期性人口波动又怎样会转变成非周期波动？这可由帐篷式函数中的两个数值来确定：一是x_n的起始值；二是增长速度r。r值的升降决定帐篷曲线的高低(图11)。当r＜1时，整个曲线居于45°线以下，人口数量终会呈下降趋势而趋于0。当1＜r≤2时，帐篷曲线的上升部分与45°线相交，无论其初始值如何，人口总数终将止于某一稳定值（x_e）。当2＜r＜3时，帐篷曲线的下降部分与45°线相交，交点处斜率的绝对值小于1，人口总数虽有波动，但仍趋向于一稳定值（x^*）。当r＞3时，帐篷曲线与45°线交点处斜率的绝对值大于1，人口变动呈现乱象。

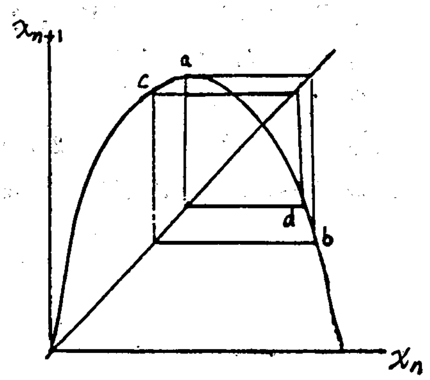

图9　帐篷式函数（二）

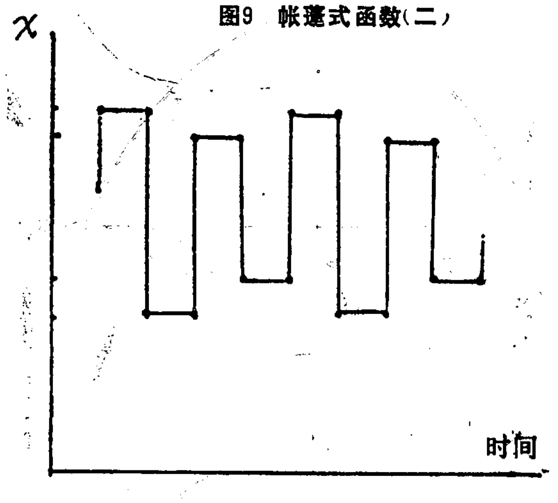

图10　周期性波动

从函数的上述性质中，可以看出，r是控制人口总数的关键指数。假如能将r值控制在1与3之间，人口总数终将达到某一计划中的稳定值（图11），而达到这个稳定值的时间

①W.J.Baumol and J.Benhabib, "Chaos: Significance, Mechanism, and Economic Application", Journal of Economic perspectives, Winter, 1989, pp.77～105

则由x_n的初始值决定。例如，假定$2<r<3$，依上述分析，人口总数x_n将渐趋一稳定值x^*。如这个稳定值不同于计划中的人口目标，通过调整人口自然增长率，可以得到所需要的r值（人口增长速度r和人口自然增长率之间存在一定的数量关系），从而使人口总数达到预定目标。

从图12中可以看到计划控制对人口发展趋势的作用。在未施行人口控制时，初始人口x_0循帐篷曲线a，经b、c而移向e，相对于e的人口数值是x^*。直线dd′表示人口控制的上限。在施行人口控制后，初始人口x_0改循dd′线，经a′、b′而移向e′，相对于e′的人口数值是x_c^*，这个控制下的人口数值低于x^*，人口总趋势的发展变化从而得以控制。

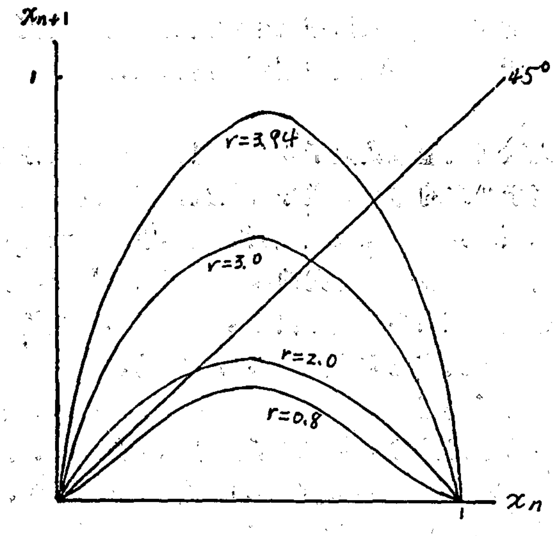

图11 人口增长速度与帐篷曲线

实际上，r值不必囿于上述值域。节制人口增长和鼓励人口增长同属人口规划。根据即时人口政策，选取适当的r值，就会达到规划人口的目的。

乱象理论在人口发展趋势上的应用，说明人口发展的不规则变化并不一定源于随机

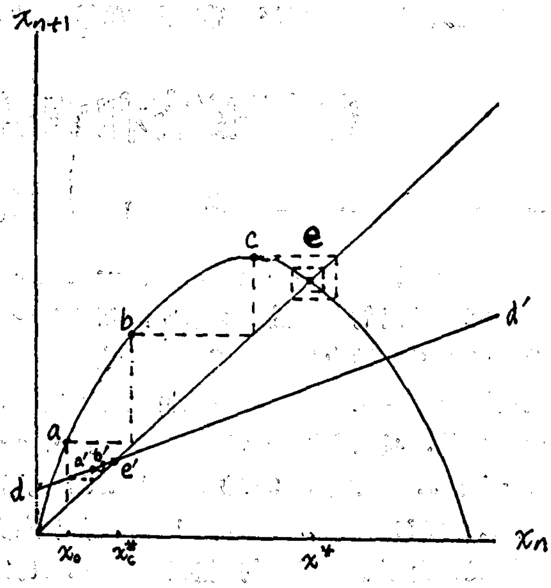

图12 计划控制下的人口发展趋势

变动，即使在全无随机变化的状况下，人口数量的发展也能产生周期性循环及非周期性波动。这一理论对实证分析有重大影响。传统的统计方法（如回归分析），假定无规律的非周期波动为随机现象。这一假定偏于经验而欠科学。乱象理论从科学角度分析无规律的非周期波动，为无规律的非周期波动找到了归宿，补充了传统统计学随机说的不足。

本文仅论及乱象理论在整体人口发展变化中的应用。从理论上看，乱象理论也可以用来研究部分人口及人口结构的发展变化。其应用前景可以延至区域性人口规划，调整人口年龄结构等方面。

（本文责任编辑：朱　萍）

（作者工作单位：
李西成　美国布赖恩特学院
曲海波　吉林大学
汤奕天　美国沙尔夫瑞吉纳学院）