《中国人口科学》1993年第3期（总第36期）

婚姻压缩和两性别线性人口模型

李 南 M. W. Feldman

关于两性别模型的研究，是由一致性问题引起的。其著名的例子是由Kuczynski,R.R.（1932）给出的。他的研究表明，在1920～1923年间，法国女性人口的净再生产率（NRR）为0.98，而男性为1.19。这一一致性问题引起了其后的一系列研究。其中最基本的问题是如何将两个性别联系起来，而最自然的答案就是通过婚姻。这就导致了模型不可避免的非线性化。在此，我们举出一些重要的工作：Karmel，P.H.（1947）；Kendall，D.G.（1949)；Goodman，L.A.（1967）；Pollard，J.H.（1973）；Yellin，J. and Samuelson，P.P.A.（1977）等。所有这些工作均得出了带有显式或非显式婚姻函数的非线性模型。而婚姻函数又引出了婚姻压缩的概念(Schoen，R.1983)。这就是：性别比的异常将导致婚姻压缩，进而再生产行为将受到所短缺的性别的限制。对于常用的女性占优模型，婚姻压缩是由男性的短缺引起的。婚姻压缩不免使人想到一个人口的生育是由人口中两个性别的相对规模决定的，故而对生育的非线性描述就是不可避免的。于是关于两性别模型研究的注意力，就更多地集中于婚姻函数，而不是一致性问题上①。

当两性别模型涉及到年龄结构，而且年龄组数或模型维数大于3时，想作全局定性分析是非常困难的。这是因为，在数学上还没有对高于3维的非线性微分方程组进行全局定性分析的一般方法，即使这些方程组的右端仅包含二项。这就是在以上提到的工作中，对于模型的均衡是否存在、是否唯一以及是否稳定等重要问题未能给出答案的原因。而在应用上，我们对模型的渐近状态或均衡，比对模型的动态过程更感兴趣。例如由Leslie模型到经典的稳定人口。所以，上述多种两性别非线性模型都未能得到广泛应用是很容易理解的。

从本质上讲，对生育的这些非线性描述，是为了处理婚姻压缩问题。在这种情况下，单性别的按龄生育率将发生变化，这意味着按龄生育率定常的假定被坏了。从应用的角度来看，没有模型能象Leslie模型那样被广泛应用。这是因为它是最简单的(线性的)年龄结构模型，虽然它只涉及一个性别并带有很严格的假设条件。实际上，我们已经有了这样的模型②。在这个模型中，一致性的问题已经解决。本文研究其婚姻压缩问题。为方便起见，我们概述这一模型如下。

一、模型

在离散型中，用下标i、m和f分别表示年龄、男性和女性。模型假定如下：

（1）男、女按龄留存率$P_{m,i}$、$P_{f,i}$不随时间变化；

（2）按龄生育率f_i不随时间变化；

①参见：Pollak, R.A.1986. "A Reformulation of the Two-Sex Problem" Demography, 23, 247～259.
Caswell, H.1989. "Matrix Population Models" Sinauer Associates Inc PP263.
Pollak, R.A.1990 "Two-Sex Demographic Models" Journal of Political Economy, 28,399～420.

②Goodman, L.A.1969. "The Analysis of Population Growth when the Birth and Death Rates Depend upon Several Factors" Biometrics, Dec.1969.659～680

（3）第i年龄组母亲生育婴儿中女孩比例v_i不随时间变化；

（4）各年龄组男性生育率为零；

（5）无迁移。

这组假定与经典Leslie模型的不同之处是消除了单性别限制，而并不是新引入的限制，因为在经典Leslie模型中也有v_i、fi不随时间变化。

以M（t）、F（t）分别表示t时刻的男、女性人口向量，则按假定模型的数学形式如下：

$$M(t+1)=A_m\cdot M(t)+C\cdot F(t) \tag{1}$$

$$F(t+1)=A_f\cdot F(t) \tag{2}$$

其中，A_m、A_f和C均为（$n\times n$）方阵。矩阵A_m除次对角线外，所有元素为零，次对角线元素依次为男性按龄存留$P_{m,i}$；矩阵A_f为经典Leslie矩阵，即除首行与次对角线外所有元素为零，首行元素依次为女性生女婴的按龄生育率$v_i$fi，而次对角线元素依次为女性按龄存留率$P_{f,i}$；矩阵C除首行元素外其它元素均匀零，首行元素依次为女性生男婴的按龄生育率（$1-v_i$）f_i。

该模型的动态解如下：

$$F(t)=A_f\cdot F(t-1)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i r_i^t F_{oi} \tag{3}$$

$$M(t)=A_m^t M(o)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i(r_i-A_m)^{-1}(r_i^t-A_m^t)\cdot C\cdot F_{oi} \tag{4}$$

其中，r_i为A_f的第i个特征根；F_{oi}为其对应的特征向量；a_i为将任给女性人口初始向量$F(o)$由F_{oi}线性表示时的常系数。当时间充分大时，模型的渐近解如下：

$$F(t)=a_o\cdot r_o^t\cdot F_{oo} \tag{5}$$

$$M(t)=a_o\cdot r_o^t(r_o-A_m)^{-1}\cdot C\cdot F_{oo} \tag{6}$$

用Ma、Fa分别表示男、女性渐近年龄结构，则：

$$F_a=F_{oo} \tag{7}$$

$$M_a=(r_o-A_m)^{-1}\cdot C\cdot F_{oo} \tag{8}$$

通过简单推导可知：

$$F_a^T=(r_o^{-1},\ l_{f,1}r_o^{-2},\ \cdots,\ l_{f,n-1}r_o^{-n}) \tag{9}$$

$$M_a^T=Sab(r_o^{-1},\ l_{m,1}r_o^{-2},\ \cdots,\ l_{m,n-1}r_o^{-n}) \tag{10}$$

其中，Sab为渐近的出生性别比；$l_{m,i}$、$l_{f,i}$分别为男、女性人口由出生存活到i+1岁的留存率。而渐近按龄性别比向量Sa为：

$$S_a^T=Sab\left(1,\frac{l_{m,1}}{l_{f,1}},\ \cdots,\ \frac{l_{m,n-1}}{l_{f,n-1}}\right) \tag{11}$$

显然，在此模型中，联系两个性别的方法不是使用社会学概念——婚姻。在这类方法中，婚姻函数是必须的，而这些函数的稳定性（这里指不随时间变化的性质）是令人怀疑的。在此模型中，联系两个性别的方法是使用生理和遗传的概念——各年龄组母亲生育的出生性别比，这要比婚姻稳定得多。对于v_i的稳定性，除了溺婴与选择性流产外，没有其他因素能使其随时间发生显著变化。而关于婚姻行为的稳定性，让我们来看看最大曾婚比G（C）（各年龄组曾婚人数与总人数之比为各年龄组曾婚比，而一个人口的最大曾婚比是各年龄组曾婚比

中最大者）。对于瑞典女性人口，在1901～1910年最大曾婚比G（C）为0.75，而在1940～1950年变为0.90；美国女性人口的最大曾婚比G（C）在1930年为0.90① 而后变为0.70②。对于这些时期的瑞典和美国，并没有性比例异常变化而产生婚姻压缩的原因，从而使最大曾婚比G（C）发生如此显著的变化。因而我们的结论是，若从性比例角度来描述婚姻行为，则这种描述是不稳定的。

二、关于婚姻压缩的讨论

因为上述模型是女性占优的，故婚姻压缩是指由于缺少男性引起女性结婚困难而导致的女性按龄生育率下降。假定在时刻t=0，一个突然的扰动使按龄性别比向量偏离了其合适的状态，然后这个扰动消失了，这导致了生育率f_i的下降。我们用以下三个向量分别表示t时的按龄生育率、男性年龄结构、女性年龄结构。

$$F(t)=(0,\ \cdots,\ 0,\ f_{K,t},\ \cdots,\ f_{m,t},\ 0,\ \cdots 0)^T \tag{12}$$

$$M(t)=(a_{m,o}(t),\ a_{m,1}(t),\cdots,a_{m,n-1}(t))^T \tag{13}$$

$$F(t)=(a_{f,o}(t),a_{f,1}(t),\cdots,\ a_{f,n-1}(t))^T \tag{14}$$

当稳态被打破后，主要问题在于稳态能否恢复，以及在什么条件下恢复。为此先要回答两个问题，一是何种按龄性别比为标准态；二是对于标准态有多大偏离会导致婚姻压缩。对于第一个问题，可以把渐近态Sa作为标准态，并令Sa,i为Sa的第i个元素；对于第二个问题，需引入一个评价函数g，

$$G(t)=g\left[(S_{ao}-S_o(t)),\ (S_{a1}-S_1(t)),\cdots,(S_{an-1}-S_{n-1}(t))\right] \tag{15}$$

其中$Si(t)$表示t时第i个年龄组的性别比。设g具有以下性质：

$$1)\ g(0,\cdots,0)=0 \tag{16}$$

$$2)\ \frac{\partial g}{\partial(S_{ai}-S_{ai}(t))}\geqslant 0. \tag{17}$$

第二个问题的回答为，存在一个正的婚姻压缩临界值Ac，当

$$G(t)>Ac \tag{18}$$

时会产生婚姻压缩（下标C表示参数Ac由文化决定）。我们考虑扰动后的动态系统，并假设扰动确实导致婚姻压缩。

$$\begin{aligned}A_{m,o}(t+1)&=\sum_{i=0}^{n-1}(l-v_i)\cdot f_{i,t}\cdot a_{f,i}(t)\\&=[1-v(t+1)]\sum_{i=0}^{n-1}f_{i,t}\cdot a_{f,i}(t)\\&=[1-v(t+1]\cdot b(t+1)\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}A_{f,o}(t+1)&=\sum_{i=0}^{n-1}v_i\cdot f_{i,t}\cdot a_{f,i}(t)\\&=v(t+1)\cdot b(t+1)\end{aligned} \tag{20}$$

$$S_o(t+1)=(1-v(t))/v(t) \tag{21}$$

①Coale, A.J.1971, "Age Patterns of Marriage" Population Studies, 25(2), 193～214.

②Sweet, J.A.and Bumpass, L.L.1990 "American Families and Households" Russell Sage Foundation, New York.

尽管扰动已经消失，但扰动打破了渐近稳态。因此，所有带t的变量将随时间变化。这里$b(t)$表示t时出生数；$v(t)$表示t时出生女婴与出生数之比；$S_o(t)$为t时出生性别比。由(1)，(2)，(19)，(20)可知

$$M(1)=A_m\cdot M(0)+C(0)\cdot F(0)=A_m\cdot M(0)+([1+v(1)]\cdot b(1),0,\cdots,0)^T \quad (22)$$

$$F(1)=A_f(0)\cdot F(0)=[v(1)\cdot b(1),p_{f,1}\cdot a_{f,o}(0),\cdots,p_{f,n-1}\cdot a_{f,n-2}(0)]^T \quad (23)$$

……

$$M(n)=[(1-v(n))\cdot b(n),(1-v(n-1))\cdot l_{m,1}\cdot b(n-1),\cdots,(1-v(1))\cdot l_{m,n-1}\cdot b(1)]^T \quad (24)$$

$$F(n)=[v(n)\cdot b(n),\ v(n-1)l_{f,1}\cdot b(n-1),\cdots,v(1)\cdot l_{f,n-1}\cdot b(1)]^T \quad (25)$$

从(24)。(25)式得

$$S(n)=(S_o(n),S_o(n-1)\cdot l_{m,1}/l_{f,1}\cdots,S_o(1)l_{m,n-1}/l_{f,n-1})^T \quad (26)$$

式(26)表明，在时间n的按龄性别比向量由在[1, n]时段内出生性别比确定。由(26)可知：

$$G(n)=g[(Sab-S_o(n)),(Sab-S_o(n-1))\cdot l_{m,1}/l_{f,1},\cdots,(Sab-S_o(1))l_{m,n-1}] \quad (27)$$

用(27)来计算$G(n)$很困难，因为从(18)，(19)，(20)来确定$S_o(t)$需要知道性别比与生育率的定量关系。如果我们确知性别比与生育率的定量关系，并由此计算出$G(n)$，我们就可以根据(18)来判断婚姻压缩是否会消失。若婚姻压缩消失，则按龄生育率将恢复原状，进而扰动前的渐近状态也将恢复。这意味着我们可以对高于三维的非线性模型进行全局渐近分析，但这种分析是在(18)的基础上使用恢复这一概念完成的。

尽管我们无法直接估计G(n)，但们可得出恢复渐近状态的一些充分条件。由(19)、(20)、(21)式可知：

$$\begin{aligned}S_o(t+1)&=\sum_{i=0}^{n-1}(1-v(i))\cdot f_{i,i}\cdot A_{f,i}(t)/\sum_{i=0}^{n-1}v(i)\cdot f_{i,i}\cdot A_{f,i}(t)\\&=\sum_{i=0}^{n-1}f_{i,i}\cdot A_{f,i}(t)/\sum_{i=0}^{n-1}v(i)\cdot f_{f,i}\cdot A_{f,i}(t)-1\geqslant 1/v_{imax}-1\\&=minSbi\end{aligned} \quad (28)$$

其中$maxv_i=max(v_i)$，$Sbimin=min[(1-v_i]/v_i]$。Sbi是母亲为第i个年龄组的出生婴儿性别比。由(28)得：

$$G(n)\leqslant g_{max}=g((Sab-minSbi),\cdots,(Sab-minSbi)l_{m,n-1}/l_{f,n-1}) \quad (29)$$

其中g_{max}与时间t无关，若函数g的形式确定就可计算。当

$$g_{max}<Ac \quad (30)$$

时，即使存在婚姻挤压，上述渐近分析还是正确的。当然，若(30)式不成立，也不能说渐近分析是错误的，这时只不过我们无法从关于g_{max}的分析中得到结论。这里中心问题的答案是，只要(30)式成立，渐近状态(即稳态)就将恢复。

从以上分析可知，不论扰动多强，经过一个生命周期后，第i年龄组性别比与其稳态性别比的偏差将不超过(Sab－minSbi)$\cdot L_{m,i}/L_{f,i}$。这里重要的结果是，问题已从出生性别比的时间变化(26)转化为不同年龄组母亲生育婴儿性别比差别，即v_i与v_j的差别。特别的，当$v_i=v$，即各年龄组母亲生育婴儿的性别比无差别时，$g_{max}=0$。在这种情况下，无论Ac

多小，无论扰动多强，稳态将在一个生命周期后恢复。

Chahnazarian，A.综述了关于出生性别比的研究①。在32项母亲年龄与出生婴儿性别比关系的研究中，16项发现没有关系，3项发现没有简单线性相关关系，13项发现有负相关关系。在27项出生胎次与性别比关系的研究中，4项发现没有关系，23项发现有负相关关系。显然可以认为，出生性别比与出生胎次有稳定的负相关关系。由于胎次通常随母亲年龄增加而增加，因而出生性别比与母亲年龄也有负相关关系，即出生性别比随胎次或母亲年龄的增加而下降。关于这种下降幅度有多大的问题，经常被引用的Teitelbaum，M.S.（1970）的结果②是，出生性别比从第一胎到第五胎以上将下降0.26%。由此可知，出生性别比将随母亲年龄的增长而下降。但从生育年龄开始到结束，这种下降不超过0.26%。这对应于

$$(Sab-minSbi)<0.0026Sab\ll 1 \tag{31}$$

再注意到$l_{m,i}/l_{f,i}<1$，即扰动消失50年（育龄上限）后，各生育年龄上的性别比的性别比与其隐态性别比的偏差将小于$0.0026Sab$，虽然我们还不清楚函数g的具体形式与临界值Ac的大小，但这样小的性别比偏差会导致婚姻压缩是难以想像的。因此，我们得出：一般情况下在扰动消失一个生育周期（通常为50年）后，扰动对育龄期各年龄性别比造成的影响将会消失，因而按龄生育率将恢复为稳态数值，进而所有稳态结果都将恢复。

本文的结论是：当扰动造成婚姻压缩时，两性别线性模型不能正确描述其动态过程，但此线性模型所给出的描述渐近状态或稳态的结果，即使在考虑扰动并且此扰动确实导致了婚姻压缩的情况下也们是正确的。尽管我们还无法使用非线性模型进行描述，但我们可用以上线性模型来完成。而如果我们要做动态分析，而且在此动态过程中，确实存在着导致婚姻压缩的性别比异常（这在一个大的人口中是很少见的），那么应当使用带有合适婚姻函数的非线性模型。

参考资料：

1.Goodman, L.A.1867. "On the Age-Sex Composition of the Population that would result from given Fertility and Mortality Conditions" Demography 4, 423～441.

2.Karmel, P.H.1947. "The Relation between Male and Famale Reproduction Rates" Population Studies 1, 248～274.

3.Kendall, D.G.1949. "Stochastic Processes and Population Growth" J.Roy.Staties.Soc.Ser.B11、230～264.

4.Schoen, R.1983. "Measuring the Tightness of a Marriage Squeeze" Demography, 20, 61～78.

5.Yellin, J.and Sumuelson, P.A.1977. "Comparison of Linear and Nonlinear Models for Human Population Dynamics" Theoretical Population Biology, 11, 105～126.

（本文责任编辑：郭汉英）

（作者工作单位：李　南　西安交通大学人口研究所；M. W. Feldman Stanford大学Morrison人口与资源研究所。）

① Chahanazarian, A.1988."Determinants of the Sex Retio at Birth: Review of Recent Literature"Social Boilogy, Vol.35, No.3～4, 215～235.

② Teitelbaum, M.S.1970."Factors Affecting Sex Ratio at Birth in Large Population"J.Biosoc Sci Suppl.2: 61～71.