《中国人口科学》1993年第3期（总第36期）

孩次递进比数学模型的建立与生育表的构造

陈友华

一、引言

法国著名人口学家Louis Henry在对队列妇女生育率的研究中，于1953年首先提出了孩次递进比的概念，但由于缺少相应的统计数据，以后近30年间很少有人涉足这一领域。近十年来，由于中国的人口控制是按孩次与生育间隔进行的，因而刺激了这个研究方向的发展。美国人口学家Griffith Feeney和中国人口学者王丰等利用中国1987年1%人口变动抽样调查资料，计算得到中国妇女各年度的时期孩次递进比，并以此来分析中国妇女生育率的变化。由于这种孩次递进比分析方法满足了以孩次与生育间隔为主要特征的中国计划生育的特殊需要，因而目前已成为研究中国妇女生育率变化的强有力工具之一。

1982年美国生物统计学家C.L.Chiang和B.J.van den Berg从另一种完全不同的角度也提出了孩次递进比的概念．并给出了具体计算方法。用此方法计算孩次递进比，只需要妇女各产次所生孩子的数目以及各产次妇女的平均年龄等极少的资料，计算相当简单，所需资料也易于取得，因而不失为分析妇女生育率变化的又一有力工具。但遗憾的是C.L.Chiang等的方法未能引起人口学家的重视。

本文在1982年C.L.Chiang等工作的基础上，提出了包含结婚与死亡因素的孩次递进比数学模型，并利用1988年中国生育节育抽样调查河南省的原始数据，编制了该省1987年7月～1988年6月的妇女生育表。

二、孩次递进比数学模型的建立

人类的生殖过程可以看成是一个具有阶段性的过程；每个阶段由一个孩子的出生或初婚事件的发生来定义（初婚可以看成生育的准备阶段），这个过程一个阶段又一个阶段地向前推进，直到家庭的扩充完成为止。这里的阶段定义为生育期内已有i次活产、但还没有i+1次活产的妇女所处的阶段，记为Fi（$i=-1，0,1,2,\cdots，n$；F_{-1}、F_0分别表示未婚与已婚未育妇女所处的阶段）。一个妇女除了可能从一个阶段F_i向下一阶段F_{i+1}转移外，还可能在F_i阶段死亡，或在F_i阶段一直持续到生育期结束。我们用D表示死亡，用E表示生育期结束。这样，一个妇女在其整个生育期内的可能变化可以用下图表示：

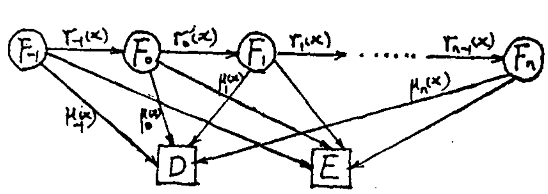

图1 一个妇女在整个生殖期内的可能转化流程图

图1中的n表示一个妇女可能的最大活产次数，箭头表示阶段间的转移，箭头的左方或上方的$\gamma_i(x)$与$\mu_i(x)$表示各阶段的转移强度函数，也即生育强度函数$\gamma_i(x)$（$\gamma_{-1}(x)$

表示初婚强度函数）与死亡强度函数μ_i（x）。每个生育强度函数$\gamma_i(x)$与死亡强度函数μ_i（x）是妇女的年龄x与产次i的函数。具体定义如下：

$$r_i(x)\varDelta x+o(\varDelta x)=p_r\{x\text{岁的产次为}i\text{的妇女，在}(x,x+\varDelta x)\text{内再生一个活产孩子}\}$$

$$\mu_i(x)\varDelta x+o(\varDelta x)=p_r\{x\text{岁的}i\text{产次妇女，在}(x,x+\varDelta x)\text{内死亡}\}\quad i=-1,0,1,\cdots\cdots$$

对于产次为i，年龄为x_i的一个妇女，指数函数

$$\exp\{-\int_{x_i}^{x}[\mu_i(t)+r_i(t)]dt\}$$

是她在年龄区间（x_i，x）内不再生孩子，且活到x岁时的概率，也即在（x_i，x）内仍停留在F_i阶段的概率。若$x=x_w$。（x_w是该妇女生育期结束时的年龄），则

$$\exp\{-\int_{x_i}^{x_w}[\mu_i(x)+r_i(x)]dx\}$$

是她在第i产后停止生育，且活到生育期末的概率。而

$$pi=\int_{x_i}^{x_w}\exp\{-\int_{x_i}^{x}[\mu_i(t)+r_i(t)]\,dt\}ri(x)dx \qquad (1)$$

是她将再生孩子的概率，也就是在x_i时处于F_i阶段的妇女，在（x_i，x_w）内将发生从阶段F_i到阶段F_{i+1}转移的概率。与通常的孩次递进比概念略有不同，这里我们考虑了妇女在整个生育期内死亡对P_i的影响。为了与通常的孩次递进比相区别，这里我们把P_i称为净孩次递进比，而通常的孩次递进比则称为粗孩次递进比；相应地，P_{-1}表示净初婚递进比，P，表示净初育递进比，而

$$q_i=\int_{x_i}^{x_w}\exp\{-\int_{x_i}^{x}[\mu_i(t)+r_i(t)]dt\}\mu_i(x)dx \qquad (2)$$

是她在生育期内停止生育，且死于剩余生育期内的概率，也就是在x_i时处于Fi阶段的妇女，在（x_i，x_w）内发生从阶段F_i到阶段D的转移的概率。我们这里把q_i称为产次为i的妇女的死亡递进比。这样：

$$\exp\{-\int_{x_i}^{x_w}[\mu i(x)+r_i(x)]dx\}=1-p_i-q_i$$

是她在生育期内停止生育，且活到生育期末的概率。

同普通寿命表中死亡率的定义类似，这里我们定义两个指标：产次别生育率γ_i与产次别死亡率μi（$i=-1$，0，1，2，…，n），具体定义如下：

$$r_i=\frac{\text{进入}F_{i+1}\text{阶段的妇女人数}}{\text{进入}F_i\text{阶段的妇女在}F_i\text{阶段生存的总人年数}} \qquad (3)$$

$$\mu_i=\frac{\text{死于}F_i\text{阶段的妇女人数}}{\text{进入}F_i\text{阶段的妇女在}F_i\text{阶段生存的总人年数}} \qquad (4)$$

可以证明：

$$r_i=\frac{p_i}{\int_{x_i}^{x_w}\exp\{-\int_{x_i}^{x}[\mu i(t)+ri(t)]dt\}dx} \qquad (5)$$

$$\mu i=\frac{q_i}{\int_{x_i}^{x_w}\exp\{-\int_{x_i}^{x}[\mu i(t)+ri(t)]dt\}dx} \qquad (6)$$

设随机变量τ_i是产次为i，年龄为x_i，且在剩余生育期内将再生产的那些妇女等待生产第i+1产的等待时间，$0<\tau_i<x_w-x_i$，τ_i的密度函数记为$f\tau_i(t)$，则

$$f\tau_i(t)=\frac{1}{pi}\exp\{-\int_{x_i}^{x_i+t}[\mu i(\xi)+ri(\xi)]d\xi\}ri(xi+t)dt \qquad (7)$$

设随机变量π_i是死于F_i阶段的妇女在F_i阶段的生活时间，$0<\pi_i<x_w-x_i$，π_i的密度函数记为$g\pi_i(t)$，则

$$g\pi_i(t)=\frac{1}{q_i}\cdot\exp\{-\int_{x_i}^{x_{i+t}}[\mu i(\xi)+ri(\xi)]d\xi\}\mu i(xi+t)dt \tag{8}$$

τ_i与π_i的数学期望分别是：
$$E(\tau_i)=\int_c^{x_w-x_i}t\cdot f\tau_i(t)dt \tag{9}$$

$$E(\pi_i)=\int_c^{x_w-x_i}t\cdot g\pi_i(t)dt \tag{10}$$

将（7）与（8）式分别代入（9）与（10）式，可得

$$p_iE(\tau_i)+q_iE(\pi_i)=\int_c^{x_w-x_i}t\cdot\exp\{-\int_{x_i}^{x_{i+1}}[\mu_i(\xi)+r_i(\xi)]d\xi\}[\mu_i(x_i+t)+r_i(x_i+t)]$$

$$dt=-(x_w-x_i)\exp\{-\int_{x_i}^{x_w}[\mu_i(x)+r_ix)]dx\}+\int_{x_i}^{x_w}\exp\{-\int_{x_i}^{x}[\mu_i(t)+r_i(t)]dt\}dx$$

$$=-(x_w-x_i)(-1p_i-q_i)+p_i/r_i \tag{11}$$

解（11）式可得：

$$r_i=\frac{p_i}{p_iE(\tau_i)+q_iE(\pi_i)+(1-p_i-q_i)(x_w-x_i)} \tag{12}$$

利用（5）、（6）与（12）式，可得：

$$\mu_i=\frac{q_i}{p_iE(\tau_i)+q_iE(\pi_i)+(1-p_i-q_i)(x_w-x_i)} \tag{13}$$

解（12）与（13）所组成的方程组，可得：

$$p_i=\frac{(x_w-x_i)r_i}{1+[x_w-x_i-E(\tau_i)]r_i+[x_w-x_i-E(\pi_i)]\mu_i} \tag{14}$$

$$q_i=\frac{(x_w-x_i)\mu_i}{1+[x_w-x_i-E(\tau_i)]r_i+[x_w-x_i-E(\pi_i)]\mu_i} \tag{15}$$

设x_i是第i产时妇女的平均年龄，x_i'是第i产后随之死于剩余生育期内的妇女的平均死亡年龄，于是有

$$E(\tau_i)=x_{i+1}-x_i \tag{16}$$

$$E(\pi_i)=x_i'-x_i \tag{17}$$

因而

$$p_i=\frac{(x_w-x_i)r_i}{1+(x_w-x_{i+1})r_i+(x_w-x_i')\mu_i} \tag{18}$$

$$q_i=\frac{(x_w-x_i)\mu_i}{1+(x_w-x_{i+1})r_i+(x_w-x_i')\mu_i} \tag{19}$$

三、生育表的构造

正如可以把l_0个某一性别人口的整个死亡过程总结在一张寿命表里一样，我们也可以把l_0个妇女在整个生育期内的生育（结婚可以看作是生育过程的一个特殊阶段）与死亡总结在一张表里，这就是定群生育表。当然，如果把某一日历年度内生育期内的全部妇女的生育与死亡过程总结在一张表里，同样可以得到一张妇女的时期生育表。这两种类型的表外观相似。我们现在借时期生育表来说明生育表的构造（见表1），此方法对定群生育表也同样适用。

表1第1列为产次i。表中的最后一个产次随所研究人口的生育模式而变化，就我国目前的情况而言，取5较为合适。

第2列为第i产时妇女的平均年龄x_i。在时期生育表中，即为所研究的一年中第i产时妇女的平均年龄。和通常寿命表中预先固定年龄区间不同，生育表中各产次妇女的平均年龄由

表1　　1987年7月～1988年6月河南省妇女净生育表

i	Xi*	Xi'	$\hat{p}$i	$\hat{q}$i	li	di	Si	Li	Ti	$\hat{e}$i	$\hat{e}$i
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
−1	15.00	19.60	.9905	.0092	100000	920	31	697669.50	3383687.00	14.44	33.84
0	21.99	24.87	.9497	.0026	99049	257	4726	260081.42	2686017.00	7.46	27.12
1	23.34	32.10	.9913	.0078	94066	733	86	376107.10	2425936.00	6.50	25.79
2	27.28	31.03	.6507	.0306	93247	2853	29719	861265.10	2049828.00	2.57	21.98
3	30.17	36.71	.3502	.0098	60675	594	38833	828763.00	1188563.00	0.96	19.59
4	32.75	38.56	.0802	.0263	21248	558	18986	334635.60	359800.20	0.18	16.93
5	35.03	43.25		.0300**	1704	51	1653	25164.63	25164.63	0.00	14.77

* $x_w=50$。
* * 0.0300是假想的死亡概率。
资料来源：1988年中国生育节育抽样调查河南省原始数据经机器汇总而得。

所研究的人口总体来确定，或者由年度人口统计资料确定。这是一个年龄值，不是预先决定的，因而具有变异性。一个妇女进入生育期的初婚年龄记为x_{-1}，通常取$x_{-1}=15$，而实际具备生育条件的生育初始年龄为x_0，它实质上就是所研究人口的平均初婚年龄。一个妇女在生育期结束时的年龄记为x_w，通常取45或50岁作为x_w的数值。

第3列为死于F_i阶段的妇女的平均死亡年龄x'_i。第4列为产次为i的妇女的净孩次递进比$\widehat{P}_i$。它表示已经历i次活产的妇女再生第i+1个孩子的概率。第5列为产次为i的妇女的死亡递进比$\widehat{q}_i$。它表示已经历i次活产的妇女随后停止生育，且死于剩余生育期内的概率。

第6列为有i次或多于i次活产的妇女人数l_i，也就是进入F_i阶段的妇女人数。对于时期生育表，这一列的第一个数字l_{-1}是任意的一个基数，它表明一个参与人类生育的理论女性人口总体，习惯上我们总取基数l_{-1}为一个方便的值，比如$l_{-1}=100000$，其后的各数值l_i表示这个理论上的初始定群l_{-1}个妇女中有i个或更多活产的妇女人数（l_0表示初婚人数）它们之间的关系式为$l_{i+1}=l_i\cdot\widehat{P}_i$，（i=−1，0，1，…）

第7列为第i次活产后停止生育且死于剩余生育期内的妇女人数d_i，$d_i=l_i\cdot\widehat{q}_i$（i=−1，0，1，…）。

第8列为第i次活产后停止生育且活到生育期结束的妇女人数S_i，$S_i=l_i\cdot(1-\widehat{p}_i-\widehat{q}^i)$ i=（−1，0，1，…）。

第9列为产次为i的妇女在阶段F_i的总的生存人年数，

$$L_i=S_i(x_w-x_i)+d_i(x'_i-x_i)+l_{i+1}(x_{i+1}-x_i)$$

第10列为第i产后总的生育时间跨度T_i。这是第i产妇女尚存的具有净生育能力的时间之和　　$T_i=L_i+L_{i+1}+\cdots$

第11列为从第i产到完成家庭扩充的期望等待时间$\widehat{e}_i$，

$$\widehat{e}_i=\sum_{j=i}S_j(x_j-x_i)/\sum_{j=i}S_j,\qquad (i=-1,\ 0,\ 1,\ \cdots)。$$

虽然一个妇女将生产的孩子数是不确定的，而且相继两胎的时间间隔也是因人而异的，但是用寿命表方法可以估计一个妇女完成她的家庭扩充所需的时间。

第12列为第i产后妇女所剩余的期望净生育期长度e_i'，

$e_i'=T_i/L_i$，（$i=-1, 0, 1, 2, \cdots$）。

四、时期人口净孩次递进比及死亡递进比的计算

根据一个时期的人口调查或生命统计资料构造生育表需要预先计算各孩次所对应的净孩次递进比$\hat{p}_i$与死亡递进比$\hat{q}_i$。我们以1988年中国生育节育抽样调查河南省妇女1987年7月～1988年6月的资料来说明计算$\hat{p}_i$与$\hat{q}_i$的过程(见表2)。

表2 1987年7月～1988年6月河南省妇女净孩次递进比、死亡递进比计算表

i	Pi	Di	bi	Xi	Xi′	1000ri	1000μi	$\hat{p}$i	$\hat{q}$i
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
−1	7556	10		15.00	19.60	142.01	1.32	.9905	.0092
0	3071	3	1073	21.99	24.78	361.77	0.98	.9497	.0026
1	3078	6	1111	23.34	32.10	247.89	1.95	.9913	.0078
2	3932	13	763	27.28	31.03	70.45	3.31	.6507	.0306
3	2769	2	277	30.17	36.71	25.64	0.72	.3502	.0098
4	1798	3	71	32.75	38.56	5.09**	1.67	.0802	.0263
5	1344	4	16	35.03	43.25		2.98		

* $x_w=50$，** $5.09=1000\times16/(1798+1344)$

资料来源：同表1。

表2第1列为产次i。第2列为在生育期内产次为i的期中妇女人数P_i。它也是产次为i的妇女在第F_i阶段总的生存人年数的估计值。在表2中，P_i是河南省1987年底产次为i的妇女人数（P_{-1}是15～49岁未婚妇女人数）。第3列为在生育期内死亡的产次为i的妇女人数D_i（D_{-1}是15～49岁未婚死亡人数）。第4列为产次为i的妇女人数或所生的i孩次的孩子数bi（b_0表示15～49岁的初婚妇女人数）。第5列为第i产时妇女的平均年龄x_i（x_0表示平均初婚年龄）。第6列为在生育期内死亡的产次为i的妇女死亡时的年龄x_i'。第7列为产次为i的妇女的生育率r_i，$r_i=b_{i+1}/P_i$。第8列为产次为i的妇女的死亡率μ_i，$\mu_i=D_i/P_i$。第9列为产次为i的妇女的净孩次递进比$\hat{p}_i$，

$$\hat{p}_i=\frac{(x_w-x_i)r_i}{1+(x_w-x_{i+1})r_i+(x_w-x_i')\mu_i}。$$

第10列为产次为i的妇女的死亡递进比$\hat{q}_i$，$\hat{q}_i=\dfrac{(x_w-x_i)\mu_i}{1+(x_w-x_{i+1})r_i+(x_w-x_i')\mu_i}$，

表3 1987年7月～1988年6月河南省妇女的粗生育表

i	Xi*	$\hat{p}$i	li	si	Li	Ti	$\hat{e}$i	$\hat{e}$i′
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
−1	15.00	.9985	100000	151	703229.50	3500000.00	14.44	35.00
0	21.99	.9519	99849	4803	262844.20	2796771.00	7.47	28.01
1	23.34	.9965	95046	333	382047.10	2533927.00	6.50	26.66
2	27.28	.6678	94713	31464	897651.60	2151880.00	2.58	22.72
3	30.17	.3525	63249	40954	869638.90	1254228.80	0.98	19.83
4	32.75	.0876	22295	20476	357358.30	384588.80	0.19	17.25
5	35.03		1819	1819	27230.43	27230.73	0.00	14.97

* $x_w=40$。 ** $5.09=1000\times16/(1798+1344)$

资料来源：同表1。

五、讨论

如果不考虑在整个生育期内妇女本身的死亡对生育的影响，我们可以得到通常意义下的妇女孩次递进比p_i（p_{-1}为初婚递进比，p_0为初育递进比），具体计算公式如下：

$$p_i=\frac{(x_w-x_i)r_i}{1+(x_w-x_{i+1})r_i}$$

进而也可以编制妇女的生育表（参见表3与表4）。为了区分这两种类型的生育表，我们把表1形式的生育表称为净生育表，把表3形式的生育表称为粗生育表或生育表。粗生育表的编制方法与净生育表完全类似。

考虑到生育结果的差异性，如男婴、女婴、正常婴儿与非正常婴儿等，同时还考虑到妇女的各种死亡因素对生育结果的影响，我们可以建立各种类型的孩次递进比数学模型，并可进一步编制各种类型的减少生育表。

表4 1987年7月～1988年6月河南省妇女的孩次递进比计算表

i	pi	bi	Xi*	1000ri	$\hat{p}_i$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
-1	7556		15.00	142.01	.9985
0	3071	1073	21.99	361.77	.9519
1	3078	1111	23.34	247.89	.9965
2	3932	763	27.28	70.45	.6678
3	2769	277	30.17	25.64	.3525
4	1798	71	32.75	5.09**	.0816
5	1344	16	35.03		

*x_w=50。 ** 5.09=1000×16/（1798+1344）

资料来源：同表1。

同样，考虑到妇女本身的差异——这种差异所包含的内容可以是相当广泛的，如可以指职业、文化程度上的差异，也可以指身体健康状况等方面的差异以及这种差异对生育结果的影响（如是否为先天畸型、是否患先天性遗传疾病等）。我们也可以把妇女按某一种或几种特征进行分类，对每一类型妇女按本节第二段的方法建立孩次递进比数学模型，并在此基础上编制各种类型的生育表。通过对各种类型妇女的多重减少生育表的对比分析，来研究妇女本身的差异对生育结果或生育水平的影响程度。由此，这种分析方法的应用前景是相当广阔的。

参考文献：

1. C.L. Chiang and B.J. van den Berg, A Fertility Table for the Analysis of Human Reproduction, Math. Biosci. 62: 237～251(1982).
2. C.L. Chiang, Parity Progression Ratio and Fertility Rate. Math. Biosci. 70: 105～108(1984).
3. A.L. Golbeck, Statistical Theory of a Life Table for Human Fertility, Ph.D. Dissertation in Biostatistics, University of California at Berkeley, 1983.
4. A.L. Golbeck, A Multiple Decrement Fertility Table Based on Parity. Math. Biosci. 79: 73～86(1986).
5. A.L. Golbeck, Parity Progression in the Presence of Fetal Death: Transforming Central Rates into Probabilities. Math. Biosci. 88: 85～105(1988).
6. Griffith Feeney and others, Recent Fertility Dynamics in China: Results from the 1987 One Percent Population Survey. Population and Development Review. 14: 245～286(1989).
7. 陈友华：《人类生殖的生育表》，北京师范大学硕士论文(1990)

（本文责任编辑： 洪 映）

（作者工作单位：江苏省计划生育委员会）