

# 中国人口死亡率 Lee-Carter 模型的再抽样估计、预测与应用\*

吴晓坤 王晓军

**【摘 要】**文章采用泊松最大似然估计方法建立中国人口分年龄死亡率的 Lee-Carter 模型,在最大似然估计的基础上附加再抽样方法对模型参数、死亡率及其他相关变量进行再抽样估计和预测,并与未采用再抽样方法的估计结果进行比较。结果表明,由于 Lee-Carter 模型中某些估计参数的不确定性将传导给预测变量,在相同置信水平下,附加再抽样方法得到的死亡率及其他相关变量的区间估计的长度更大,说明再抽样方法能够有效地测度估计与预测中的不确定性,同时也说明对中国人口死亡数据建模时附加再抽样方法的必要性。

**【关键词】**死亡率 Lee-Carter 模型 再抽样方法 不确定性

**【作 者】**吴晓坤 华北电力大学数理学院,讲师;王晓军 中国人民大学统计学院,教授。

## 一、引 言

死亡率建模和预测是人口预测的基础,也是寿险公司风险管理的基础。最早的死亡率预测模型可以上溯到 1725 年的 De Moivre 模型,随后的 200 多年来,人口学和精算学相关领域的研究者提出了不少死亡率模型。早期的死亡率预测模型是确定性模型,预测结果是一个确定的值,后来的随机死亡率模型可以给出死亡率的区间预测。Lee 等(1992)提出的 Lee-Carter 模型是随机死亡率预测模型的经典,后经不少学者不断改进,形成了 Lee-Carter 类模型,并被广泛用于世界各国的人口预测。

运用 Lee-Carter 模型预测死亡率,在模型参数估计和预测中都存在不确定性,早期 Lee-Carter 模型的应用中主要考虑预测中时间序列部分产生的不确定性,后来 Brouhns 等(2002a、2002b)、Brouhns 等(2005)、Koissi 等(2006)、Renshaw 等(2008)、Li 等(2009)利用再抽样方法全面研究了估计与预测中的不确定性。这些研究都认为估计模型存在不确定性,继而在模型不确定性的基础上研究预测变量的不确定性。这些改进有助于更全面地控制在

\* 本文为中央高校基本科研业务费专项资金“随机动态死亡率模型与生命表的研究与应用”(编号:2014MS163)的阶段性成果。

死亡率、预期寿命及其他相关的预测中由预测结果的不确定性而带来的风险。

国内相关研究主要运用 Lee-Carter 模型对中国人口死亡率进行预测(卢仿先、尹莎, 2005; 祝伟、陈秉正, 2009; 韩猛、王晓军, 2010), 但都没有运用再抽样方法考虑模型中参数的不确定性。李志生、刘恒甲(2010)首次在中国人口死亡率 Lee-Carter 模型(5岁一个年龄组, 共19个年龄组)中使用残差再抽样方法, 然而, 其方法是对死亡率的残差直接进行再抽样得到死亡率的再抽样值, 而不是模型参数的再抽样值, 在此基础上进行预测时运用的参数仍然(部分)是确定性的, 包括年龄总体因子和年龄变动因子。在利用中国人口死亡数据建立 Lee-Carter 死亡率模型与应用中使用再抽样方法有待开展。

## 二、Lee-Carter 模型最大似然估计结合再抽样方法

Lee 等(1992)构造了一个简洁、适用广泛的死亡率模型, 其形式为:  $\ln \mu_x(t) = \alpha_x + \beta_x \kappa_t + \varepsilon_{xt}$ 。其中,  $x$  表示年龄,  $t$  表示时期,  $\mu_x(t)$  为  $t$  时期  $x$  岁的死亡力, 建模时通常直接使用中心死亡率  $m_x(t)$ ,  $m_x(t) = d_{xt} / e_{xt}$ , 其中  $d_{xt}$  为死亡人数;  $e_{xt}$  为平均年中人口数;  $\alpha_x$  为特定年龄  $x$  岁的总体死亡率因子;  $\beta_x$  为年龄别死亡率变化因子, 度量  $x$  岁人口死亡率的变化强度(通常为改善强度);  $\kappa_t$  为时间因子, 度量  $t$  时期所有年龄死亡率的改善水平;  $\varepsilon_{xt}$  为误差项。Lee 等(1992)利用矩阵奇异值分解法对模型的参数进行估计并对参数进行调整, 利用 Box-Jenkins 方法对一系列估计值  $\kappa_t$  进行建模, 使用 ARIMA 模型拟合并预测  $\kappa_t$  值, 从而预测死亡率。

一般的 Lee-Carter 模型在得到参数  $\alpha_x$ 、 $\beta_x$ 、 $\kappa_t$  的估计后, 认为  $\alpha_x$ 、 $\beta_x$  是确定的, 仅考虑  $\kappa_t$  预测时产生的不确定性, 进而得到死亡率等预测变量的区间预测。区间预测可以通过随机模拟的方法得到, 首先对所建立的  $\kappa_t$  满足的时间序列中的随机项进行随机模拟得到  $\kappa_t$  的区间预测, 再根据死亡率等预测变量与参数  $\alpha_x$ 、 $\beta_x$ 、 $\kappa_t$  之间的关系得到预测变量的区间预测。这种随机模拟产生的并不是原始数据, 也不是模型参数, 而是  $\kappa_t$  预测中的随机项, 本文将这种模拟方法称为非再抽样随机模拟。

Brouhns 等(2002a、2002b)、Brouhns 等(2005)、Koissi 等(2006)通过假定死亡人数服从泊松分布来代替原始 Lee-Carter 模型中对误差项的设定, 采用最大似然估计方法来估计参数, 这一改进成为目前常用的 Lee-Carter 类模型的估计方法。这些研究的核心思想为估计模型中的参数  $\alpha_x$ 、 $\beta_x$ 、 $\kappa_t$  都具有随机性(不确定性), 利用再抽样方法可以得到参数的再估计值, 再根据预测变量与参数之间的关系得到相应预测变量的再抽样预测。这样就全面充分地考虑了估计与预测过程中产生的不确定性。真正的风险往往不是风险本身, 而是我们未曾发现风险, 再抽样方法用于死亡率预测模型可以更全面地捕捉估计与预测中的不确定性, 进而达到对风险的全面防控。

Brouhns 等(2002a、2002b)根据最大似然估计的渐近正态性得到参数  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\kappa$  的再抽样值。Brouhns 等(2005)在得到  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\kappa$  的最大似然估计  $\hat{\alpha}$ 、 $\hat{\beta}$ 、 $\hat{\kappa}$  后, 假定死亡人数  $d_{xt}$  服从均值为

$\hat{d}_{xt} = er_{xt} \hat{\mu}_x(t) = er_{xt} \exp(\hat{\alpha}_x + \hat{\beta}_x \hat{k}_t)$  的泊松分布,产生死亡人数的  $B$  个再抽样值  $d_{xt}^b, b=1, \dots, B$ , 然后由  $er_{xt}$  与每个  $d_{xt}^b$  组成新的人口数据, 重新利用最大似然估计得到参数  $\alpha, \beta, \kappa$  的估计值  $\alpha^b, \beta^b, \kappa^b, b=1, \dots, B$ , 即再抽样值, 本文将这种方法称为泊松再抽样。Koissi 等(2006)对模型估计过程中产生的残差进行再抽样, 首先得到残差的  $B$  个再抽样值  $R_{xt}^b$ , 然后根据原始数据、估计模型与残差之间的关系, 计算死亡数据的再抽样值  $d_{xt}^b$ , 并重新利用最大似然估计得到参数  $\alpha, \beta, \kappa$  的  $B$  组估计值  $\alpha^b, \beta^b, \kappa^b$  作为再抽样值。

以上 3 种再抽样方法的关键与共同点是得到参数  $\alpha, \beta, \kappa$  的  $B$  个再抽样值  $\alpha^b, \beta^b, \kappa^b$ 。得到  $\alpha, \beta, \kappa$  的再抽样值后, 根据预测变量与这些再抽样值之间的关系, 建立预测变量的再抽样序列, 然后将这一序列从小到大排序, 处于  $B(\alpha/2)$  与  $B(1-\alpha/2)$  位置的两个值便构成预测变量模拟的置信水平为  $(1-\alpha) \times 100\%$  的置信区间。当然, 再抽样方法得到的不仅是区间预测, 而且是预测变量的模拟分布。

本文利用《中国人口统计年鉴》和《中国人口和就业统计年鉴》提供的数据, 整理出 1994~2010 年中国人口分年龄、分性别单岁组死亡数据, 开口组统一设定为 90 岁及以上<sup>①</sup>。依据这些基础数据, 利用泊松最大似然估计方法建立中国人口死亡率 Lee-Carter 模型。参考 Brouhns 等(2005)的方法, 在泊松最大似然估计方法的基础上使用泊松再抽样方法产生死亡数据的再抽样值<sup>②</sup>, 对模型参数进行再估计, 从而对预测变量进行再抽样预测。由于模型参数众多, 并呈非线性关系, 最大似然估计过程采用牛顿—拉夫逊算法(Renshaw 等, 2008; 祝伟、陈秉正, 2009; Pitacco 等, 2009), 所有估计和再抽样预测都借助统计软件 R 实现。

### 三、再抽样估计与预测

#### (一) 模型参数的再抽样估计

鉴于中国人口数据中男性数据的波动性大于女性<sup>③</sup>, 我们对男性与女性人口数据分别进行了 20 万次与 10 万次再抽样。图 1、图 2 为男女模型中模型参数泊松再抽样估计所得再抽样值的中位数与 95% 置信区间。从图 1 可以看出, 参数  $\alpha$  的 95% 置信区间范围很小, 说明参数  $\alpha$  估计的随机性很小; 参数  $\beta, \kappa$  在不同年龄与年份的随机性并不一致,  $\beta$  在高龄组随机性较小,  $\kappa$  则在普查年份随机性较小; 在某些年龄或年份,  $\beta, \kappa$  的再抽样估计的 95% 置

① 由于大部分日历年数据的开口组为 90+, 本文将开口组为 100+ 的数据合并处理为 90+, 开口组为 85+ 的则进行了拆分。

② 最大似然再抽样是基于最大似然的渐近正态性, 通过近似分布进行模拟。另外, 中国人口抽样数据在某些年份个别年龄上的死亡人数为零, 从而只存在单向残差, 而采用残差再抽样, 残差要完全随机, 正负残差都存在, 这样某些年龄的数据就不适合利用残差再抽样重新产生原始数据的再抽样值。

③ 由于男性预期寿命小于女性, 在年龄上限几乎一致的情况下, 低寿命群体中个体寿命的波动更大。此外, 青壮年男性的异常死亡率大于女性。从代表死亡率改善情况的因子  $\beta$  来看, 男性的  $\beta$  值变化范围更大, 反映在图像上则是曲线不光滑(见图 1)。



图1 男性模型参数的区间估计

吻合,但在某些具体的时间与年龄上往往由于观测数据的波动造成时间序列因子  $\kappa_t$  和年龄变动因子  $\beta_x$  的波动,从而影响预测结果。因此, Lee-Carter 模型往往不适于对某一具体年龄的死亡率进行预测,而是以累积指标或整体指标的形式应用,如生存函数,预期寿命。图3和图4给出了 Lee-Carter 模型参数非再抽样模拟预测与附加再抽样方法所得生存函数模拟预测结果的中位数与95%置信区间。从图中可以明显看出,再抽样方法所得结果的区间预测无论是上限还是下限都严格包含了非再抽样方法,这表明非再抽样预测未能探测到估计与预测中全部的不确定性,仅能对部分的不确定性做出度量。

### (三) 预期寿命的再抽样预测

预期寿命是与死亡率(生命表)直接相关的一个重要的数量指标。根据死亡率的再抽样预测及其产生的生存函数,可以得到预期寿命的再抽样预测。图5、图6分别是根据泊松再抽样方法与非再抽样方法预测的队列生命表得到的60岁男、女预期寿命分布密度图。从图

信区间与中位数差异显著。这表明模型中估计参数  $\beta$ 、 $\kappa$  具有明显的不确定性。 $\beta$ 、 $\kappa$  估计值所具有的不确定性将在预测过程中传递给预测变量。利用再抽样方法对模型参数进行再抽样估计可以有效捕捉参数  $\beta$ 、 $\kappa$  的不确定性,使 Lee-Carter 模型成为真正的随机系数模型。

### (二) 死亡率与生存函数的再抽样预测

依据前面得到的各参数再抽样值,可以得到过去死亡率估计的再抽样值。如果对时间序列部分的每一列再抽样值进行重新预测,则可以得到未来时间序列因子的再抽样预测,进而得到未来死亡率的再抽样预测。

我们以2010年60岁男性与女性未来死亡率为例,得到60~90岁分性别死亡率预测的再抽样值,从而得到预测的队列死亡率。Lee-Carter 模型运用最大似然估计得到的死亡率估计可以整体上与观测数据



中可以看出泊松再抽样下预测所得预期寿命的分布更为分散,表明其不确定性大于非再抽样。

通过不同分位点的具体数值可以更精确地比较二者的差距,表 1 给出了 60 岁男、女在泊松再抽样和非再抽样随机模拟预测下几个代表分位点的预期余寿。从表 1 可以看出,在小于 0.05 的低分位点,男女预期余寿泊松再抽样的结果普遍小于非再抽样的结果,在高分位点则相反。如上下 0.025 分位点处,泊松再抽样情形下 60 岁男性预期余寿分别为 18.80 和 23.87 年,非再抽样情形下分别为 19.01 和 23.10 年;这几组成对数据再次表明,在相同置信水平下,再抽样方法所得结果完全包含了非再抽样方法,这说明泊松再抽样方法在预期寿命的预测过程中所能预见的不确定性超过了非再抽样方法。从审慎的角度讲,能够更全面地考虑预测中的不确定性肯定优于忽略部分不确定性。然而,是否有必要在预测中采用再抽样方法还要看其带来的风险与损失的大小,以及决策者对其重视程度与认识态度。下面将以年金保险的例子比较两种方法不同情形下所造成的差异。

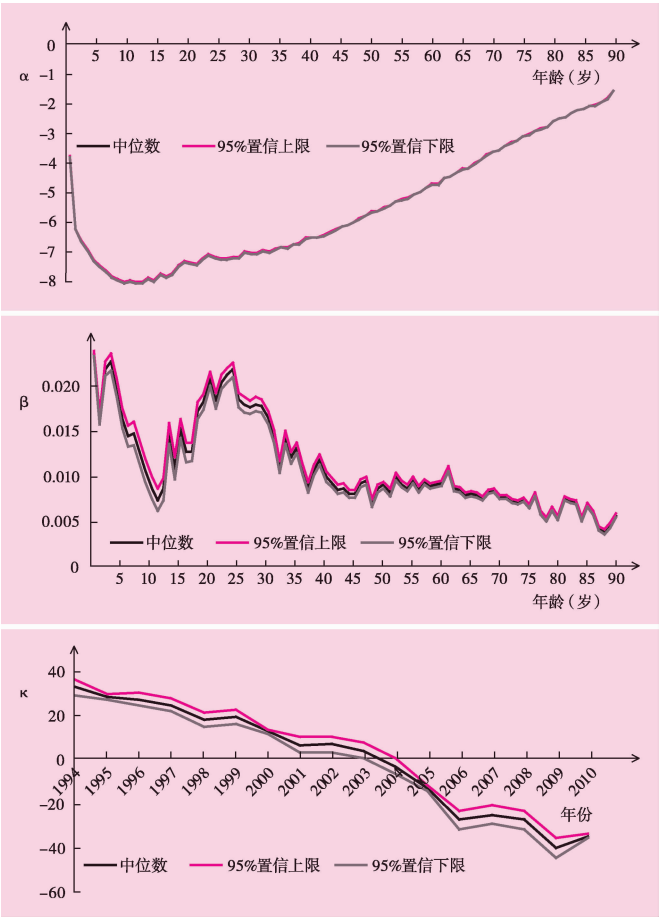


图 2 女性模型参数的区间估计

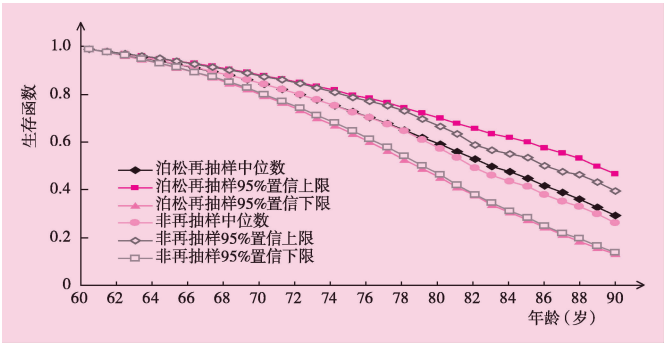


图 3 2010 年 60 岁男性再抽样预测队列生存函数

四、再抽样预测生命表在年金(养老)保险中的应用

Lee-Carter 模型能够整体吻合死亡人数并可进行长期预测,因此可用于生存年金、社会养老保险等研究与评估。生存年金产品可以是购买人在一段时间内连续缴费或者一次性趸

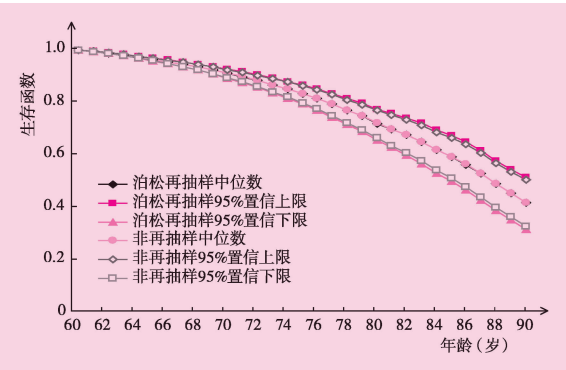


图4 2010年60岁女性再抽样预测队列生存函数

要模拟出购买该年金的1 000人在未来30年的各年的生存人数即可。我们分别使用再抽样预测生命表与非再抽样模拟预测生命表对1 000人未来30年逐年的生存人数进行了模拟。30年内总的生存人年数(见表2)对应于未来30年需要支付的总年金。

计算结果表明,在0.75分位点处男性年金业务按照再抽样预测结果将比非再抽样模拟情形多支付476单位元,约占总支付的2%,这意味着基于非再抽样预测生命表约有25%的概率不能预见因模型及预测中不确定性因素产生的超过2%的总支付。当然,对于单一的年金产品支付的模拟也有再抽样预测生命表情形小于非再抽样情形的。但在现实中,购买年金与死亡保险的人群通常为不同人群,这主要是逆选择的存在。由于逆选择,年金保险的超

缴保费购买,为简化问题我们仅考虑趸缴保费即期支付,以后每年初以购买人生存为条件支付1单位元的30年期的年金保险。为了简化问题,我们假定折现利率为零,这样年金的支付将主要与购买人的生存与死亡有关而不受利率的影响。本文以60岁1 000人的一批年金产品对购买人的净支付的现值为研究对象,并以队列预测生命表为依据产生年龄别死亡概率模拟该年金保险的净支出的现值。这样,只

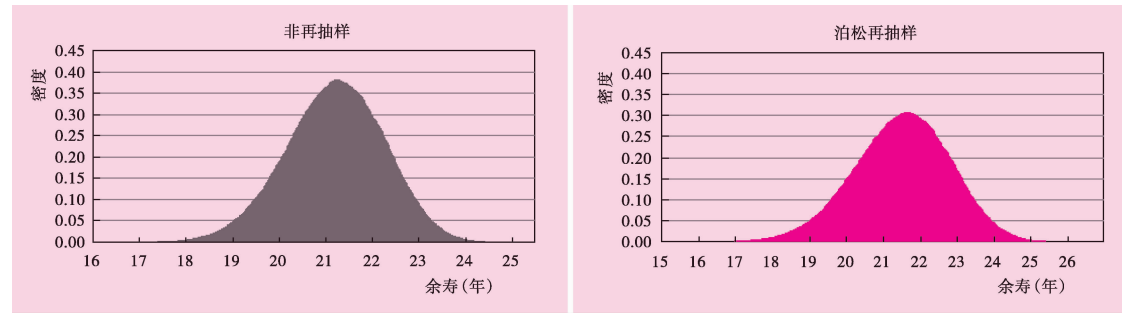


图5 基于预测队列生命表60岁男性预期寿命

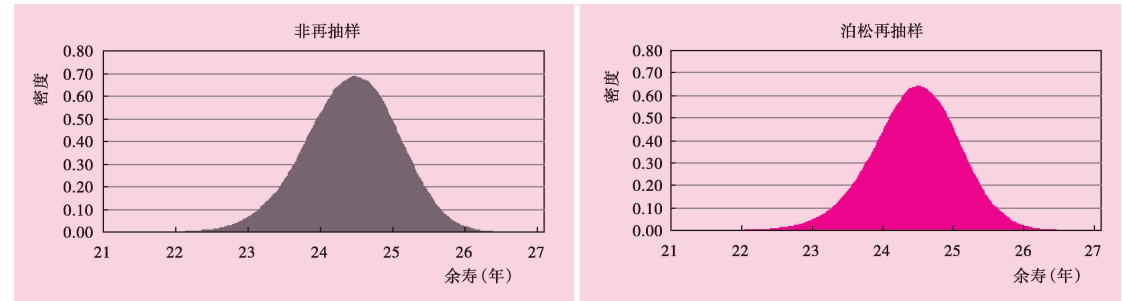


图6 基于预测队列生命表60岁女性预期寿命

额支付很可能会比模拟情况更严重。在支付偏少一侧往往对应于购买寿险的人群，同样会使寿险的支付增加。因此，使用再抽样预测生命表有利于更好地控制年金与寿险产品中的风险。为了控制风险，在产品定价时就可以按照再抽样预测生命表适当调整定价。即使不对定价做出调整，为了掌控风险，准备金也应该做出相应的调整。

表 1 基于预测队列生命表 60 岁分性别预期余寿分布 年

分位点	男 性		女 性	
	泊松再抽样	非再抽样	泊松再抽样	非再抽样
0.005	17.88	18.32	22.34	22.62
0.01	18.26	18.60	22.57	22.79
0.025	18.80	19.01	22.87	23.04
0.05	19.26	19.37	23.81	23.85
0.25	20.65	20.46	23.12	23.24
0.5	21.54	21.18	24.24	24.24
0.75	22.40	21.88	24.65	24.62
0.95	23.53	22.81	25.23	25.14
0.975	23.87	23.10	25.42	25.30
0.99	24.27	23.43	25.64	25.49
0.995	24.53	23.64	25.79	25.60

表 2 泊松再抽样与非再抽样预测生命表中 1000 人 30 年总生存人年数(60~90 岁)

	分 位 点										
	0.01	0.025	0.05	0.1	0.25	0.5	0.75	0.9	0.95	0.975	0.99
男性											
泊松再抽样	18853	19421	19899	20440	21324	22255	23137	23882	24314	24673	25075
非再抽样	19163	19618	20002	20444	21155	21923	22661	23294	23657	23954	24298
女性											
泊松再抽样	22984	23319	23583	23881	24347	24839	25303	25707	25948	26153	26385
非再抽样	23182	23454	23687	23949	24375	24836	25281	25659	25876	26058	26272

由于年金保险支付的长期性，即使是 1 个百分点的偏差，产生的总支付额也是巨大的。对于全国范围内的社会养老保险支付情况来看，由于涉及人数庞大，再抽样与非再抽样方法之间的预测差距不容小视。因此，为了更好地掌控风险，有必要在年金保险的生命表预测中使用随机预测生命表(由 Lee-Carter 模型或其他死亡率模型预测得到)的同时使用再抽样方法对生命表(由模型死亡率得到)和支付过程进行再抽样模拟。

### 五、结 语

本文基于中国人口普查和抽样调查数据，运用 Lee-Carter 模型建立了中国分年龄人口死亡率模型，利用泊松最大似然法估计模型参数，在泊松最大似然估计的基础上运用再抽样方法考察了模型参数估计的不确定性，以及由其引致的死亡率、生存函数、预期寿命和年金保险的不确定性，构建了不确定性视角下死亡率及相关变量的预测，并将其应用于年金保险的评估。

研究发现，在 Lee-Carter 模型框架下对中国人口死亡率建模与应用过程中，在模型参数

泊松最大似然估计方法的基础上,运用再抽样方法对死亡率、生存函数与预期寿命的区间预测的区间长度明显超过非再抽样方法下的结果,这表明在模型原有估计与预测方法的基础上附加再抽样方法可以更全面地探知估计与预测中的不确定性。在设定条件下,通过对年金保险的评估能够更直观地考察不使用再抽样方法所忽视的不确定性潜在的巨大风险。

非再抽样方法只考虑预测过程中产生的随机不确定性,而再抽样方法则是首先考虑估计模型的不确定性,在不确定性模型的基础上再考虑预测中产生的不确定性,因此对预测结果不确定性的考察更全面。再抽样方法不仅可以得到死亡率、生存函数、预期寿命、人口预测数量等参数的区间估计,当再抽样次数足够大时可以认为得到了其统计分布,从而可以提供更全面的统计信息。在中国人口死亡率建模与应用过程中对不确定性更全面的研究有利于更有效地掌控潜在的风险。

上述研究方法与结果可以进一步用于对保险公司寿险和年金产品现金流量和偿付能力的随机模拟分析,也可以用于对社会保障风险管理的精细化分析,由于篇幅限制,文中仅给出了一个简化的年金业务的例子,但再抽样方法所蕴含的优势已得到部分体现。

#### 参考文献:

1. 韩猛、王晓军(2010):《Lee-Carter 模型在中国城市人口死亡率预测中的应用与改进》,《保险研究》,第10期。
2. 李志生、刘恒甲(2010):《Lee-Carter 死亡率模型的估计与应用——基于中国人口数据的分析》,《中国人口科学》,第3期。
3. 卢仿先、尹莎(2005):《Lee-Carter 方法在预测中国人口死亡率中的应用》,《保险职业学院学报》,第6期。
4. 祝伟、陈秉正(2009):《中国城市人口死亡率的预测》,《数理统计与管理》,第4期。
5. Brouhns, N., Denuit, M., and Vermunt, J.K. (2002a), A Poisson Log-Bilinear Regression Approach to the Construction of Projected Lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics*. 31(3):373-393.
6. Brouhns, N., Denuit, M., and Vermunt, J.K. (2002b), Measuring the Longevity Risk in Mortality Projections. *Bulletin of the Swiss Association of Actuaries*. 2, 105-130.
7. Brouhns, N., Denuit\*, M., and Van Keilegom, I. (2005), Bootstrapping the Poisson Log-bilinear Model for Mortality Forecasting. *Scandinavian Actuarial Journal*. 3, 212-224.
8. Koissi, M.C., Shapiro, A.F., and Högnäs, G. (2006), Evaluating and Extending the Lee-Carter Model for Mortality Forecasting: Bootstrap Confidence Interval. *Insurance: Mathematics and Economics*. 38(1):1-20.
9. Lee, R.D., Carter, L.R. (1992), Modelling and Forecasting the Time Series of US Mortality. *Journal of the American Statistical Association*. 87(419):659-671.
10. Li, J.S.H., Hardy, M.R., Tan, K.S. (2009), Uncertainty in Mortality Forecasting: An Extension to the Classical Lee-Carter Approach. *Astin Bulletin*. 39(1):137-164.
11. Pitacco, E., Denuit, M., Haberman, S., and Olivieri, A. (2009), *Modelling Longevity Dynamics for Pension and Annuity Business*. Oxford University Press.
12. Renshaw, A.E. and Haberman, S. (2008), On Simulation-based Approaches to Risk Measurement in Mortality with Specific Reference to Poisson Lee-Carter Modelling. *Insurance: Mathematics and Economics*. 42(2):797-816.

(责任编辑:李玉柱)